MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

57. BAND 3. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 23. FEBRUAR 1953)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1953

Math. Z.

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretung des Verlages im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41—45 Neal Street, London W.C.2.

---

57. Band **Inhalt** 3. Heft

Seite

Peyerimhoff, A., Untersuchungen über absolute Summierbarkeit 265

Specht, W., Zur Zahlentheorie der Polynome. IV 291

Thosar, Y. V., Two Theorems on Operational Calculus 336

Gaier, D., Schlichte Potenzreihen, die auf $|z| = 1$ gleichmäßig, aber nicht absolut konvergieren 349

Meyer-König, W., Bemerkung zu einem Lückenumkehrsatz von H. R. Pitt . . . 351

Jurkat, W., Über Rieszsche Mittel und verwandte Klassen von Matrixtransformationen 353

PEYERIMHOFF, A.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 265—290 (1953)

Untersuchungen über absolute Summierbarkeit*).

Von
ALEXANDER PEYERIMHOFF.

Die vorliegende Arbeit enthält Untersuchungen über Summierbarkeitsfaktoren und verwandte Fragen bei absoluter Summierbarkeit. Bei der Behandlung derartiger Fragen für gewöhnliche Summierbarkeit ist ein gewisser Mittelwertsatz von Wichtigkeit[1]) und so wird der Wunsch hervorgerufen, auch in der Theorie der absoluten Summierbarkeit ein ähnliches Hilfsmittel zu besitzen. Im folgenden wird eine derartige Abschätzung eingeführt (§ 4, Satz 5), und es werden hinreichende Bedingungen für ihre Gültigkeit angegeben. Diese Bedingungen verlangen im wesentlichen, daß die Spalten der Matrix, welche das betrachtete Verfahren darstellt, aus monoton fallenden Nullfolgen bestehen. Mit Hilfe dieser Abschätzung lassen sich Aussagen über die Größenordnung absolut limitierbarer Folgen gewinnen. Ferner gelingt es, notwendige und hinreichende Bedingungen anzugeben, die eine Folge $\{\bar{\varepsilon}_\nu\}$ erfüllen muß, damit sie jede absolut $\mathfrak{A}$-summierbare Reihe $\sum a_\nu$ in eine konvergente, bzw. $\mathfrak{B}$-summierbare Reihe $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ überführt, falls $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gewissen Klassen von Matrixverfahren angehören. Entsprechende Bedingungen werden angegeben, wenn man von absolut summierbaren Folgen $\{s_\nu\}$ zu Reihen $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ übergeht. Diese Sätze können als Verallgemeinerung des bekannten Konvergenzkriteriums von DU BOIS-REYMOND und DEDEKIND aufgefaßt werden.

In § 1 werden die zur Durchführung dieser Überlegungen nötigen Grundbegriffe aus der Theorie der absoluten Summierbarkeit formuliert. Der § 2 enthält Hilfssätze; von besonderer Wichtigkeit ist hier das Lemma 11, durch dessen Anwendung gewisse Schlüsse von O auf o durchgeführt werden[2]) können. In § 3 werden notwendige Bedingungen für Summierbarkeitsfaktoren abgeleitet. Die §§ 4—7 enthalten die Hilfsmittel, durch deren Anwendung in den §§ 8 und 9 bewiesen wird, daß die Bedingungen des § 3 bei gewissen Klassen von Verfahren auch hinreichend sind. Die eingangs erwähnte Abschätzung für absolute Summierbarkeit wird in § 4 eingeführt. In § 5 wird ein weiterer Abschätzungssatz bewiesen; er ist in § 9 von Wichtigkeit beim Beweis einer Verallgemeinerung des Satzes von BOHR-HARDY für absolute Summierbarkeit. Diese Abschätzungen werden in § 6 verschärft. In § 7 wird die genaue Größenordnung absolut limitierbarer Folgen (bei einer gewissen Klasse von

* Die vorliegende Arbeit ist ein Teil der Habilitationsschrift des Verfassers, die der naturwissenschaftlichen Fakultät der Justus Liebig-Hochschule in Gießen vorgelegen hat.

[1]) Vgl. PEYERIMHOFF [*13*], ZELLER [*15*], JURKAT-PEYERIMHOFF [*6*].

[2]) Vgl. hierzu JURKAT-PEYERIMHOFF [*7*], Satz 2.

Verfahren) angegeben. Die §§ 10—12 enthalten Anwendungen auf spezielle Verfahren, und zwar in § 10 auf bewichtete arithmetische Mittel, in § 11 auf NÖRLUND-Verfahren und in § 12 auf CESÀROsche Verfahren. Unter anderem ergibt sich hierbei ein neuer Beweis eines Satzes von Herrn KOGBETLIANTZ[3]).

1. Allgemeine Erklärungen, Bezeichnungen und Problemstellung.

Wir betrachten Matrixtransformationen $\mathfrak{A}$, welche vermittels einer Matrix $(a_{n\nu})$ jeder Folge[4]) $\{s_\nu\}$ eine neue Folge $\{\sigma_n\}$ zuordnen durch die Vorschrift

$$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{1}$$

Eine Transformation $\mathfrak{A}$ heißt absolut konvergenztreu[5]), wenn sie jeder absolut konvergenten Folge $\{s_\nu\}$, für die also[6]) $\sum_{\nu=0}^{\infty} |s_\nu - s_{\nu-1}| = \sum_{\nu=0}^{\infty} |\Delta s_\nu| < \infty$ $(s_{-1} = 0)$ ist, eine absolut konvergente Folge $\{\sigma_n\}$ zuordnet. Sie heißt absolut permanent, wenn überdies[7]) aus $\lim_{\nu\to\infty} s_\nu = s$ stets $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$ folgt.

Lemma 1. *a) Eine Transformation $\mathfrak{A}$ ist genau dann absolut konvergenztreu, wenn*[8])

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n \sum_{\nu=\varrho}^{\infty} a_{n\nu}| \leq M \quad (\varrho = 0, 1, \ldots, M \text{ unabhängig von } \varrho) \tag{2}$$

ist. Aus (2) *folgt die Existenz folgender Grenzwerte*:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} = \alpha, \qquad \lim_{n\to\infty} a_{n\nu} = \alpha_\nu \quad (\nu = 0, 1, \ldots). \tag{3}$$

b) Eine Transformation $\mathfrak{A}$ ist genau dann absolut permanent, wenn außerdem

$$\alpha = 1, \qquad \alpha_\nu = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots) \tag{4}$$

ist.

Dieses Lemma wurde von F. MEARS[9]) zuerst bewiesen. Ein kurzer Beweis unter Verwendung funktionalanalytischer Hilfsmittel stammt von KNOPP und LORENTZ[10]).

---

[3]) KOGBETLIANTZ [*11*].

[4]) Alle in dieser Arbeit betrachteten Zahlen werden als reell vorausgesetzt.

[5]) Vgl. KNOPP-LORENTZ [*10*], MEARS [*12*].

[6]) Zur Bezeichnung von Differenzen verwenden wir folgende Symbole: $\Delta s_\nu = s_\nu - s_{\nu+1}$, $\overline{\Delta} s_\nu = s_\nu - s_{\nu-1}$, wobei im zweiten Fall stets $s_{-1} = 0$ gesetzt sei.

[7]) Jede absolut konvergente Folge ist konvergent.

[8]) Sind Differenzen von Ausdrücken mit zwei Indizes zu bilden, so kennzeichnen wir denjenigen Index, nach dem die Differenz zu bilden ist, durch Anhängen an das Differenzensymbol, also z. B. $\overline{\Delta}_n a_{n\nu} = a_{n\nu} - a_{n-1,\nu}$. In (2) sei $a_{n\nu} = 0$ für $\nu > n$. Übrigens bleibt Lemma 1 auch für nicht zeilenfinite Matrizen richtig, wenn wir zusätzlich noch voraussetzen, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}$ für alle $n \geq 0$ konvergiert.

[9]) MEARS [*12*].

[10]) KNOPP-LORENTZ [*10*].

Durch eine Transformation $\mathfrak{A}$ wird einer Reihe $\sum a_\nu$ eine Folge $\{\sigma_n\}$ zugeordnet, wenn man in (1) für s_n die Teilsummen $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ einträgt. Nach einfacher Umformung geht dann (1) über in

$$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} \bar{a}_{n\nu} a_\nu \tag{5}$$

mit

$$\bar{a}_{n\nu} = \sum_{\mu=\nu}^{n} a_{n\mu}, \qquad a_{n\nu} = \Delta_\nu \bar{a}_{n\nu} \quad (\bar{a}_{n\nu} = 0 \text{ für } \nu > n), \qquad \bar{a}_{nn} = a_{nn}. \tag{6}$$

Wir bezeichnen (1) als Folgen-Folgen-Form (FF-Form) und (5) als Reihen-Folgen-Form (RF-Form) der Transformation $\mathfrak{A}$. Bei den folgenden Untersuchungen werden wir für die, zu einer Transformation $\mathfrak{A}$ gehörigen Matrizen stets die Bezeichnungen $(a_{n\nu})$ für die FF-Form und $(\bar{a}_{n\nu})$ für die RF-Form verwenden und es sei $a_{n\nu} = \bar{a}_{n\nu} = 0$ für $\nu > n$ gesetzt.

Bei den folgenden Überlegungen ist es im allgemeinen nicht nötig, daß die betrachteten Transformationen absolut permanent sind, wir brauchen oft nur die folgende, schwächere Voraussetzung:

Die absolut konvergenten Folgen[11]) $\{s_\nu^n\} = \{\delta_{n\nu}\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ werden durch (1) in absolut konvergente Nullfolgen transformiert. Diese Forderung ist genau dann erfüllt, wenn gilt:

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} |\Delta_n a_{n\nu}| < +\infty \quad (\nu = 0, 1, \ldots), \qquad a_{n\nu} \to 0 \quad (n \to \infty, \ \nu \text{ fest}), \tag{7}$$

wenn also die Spalten der Matrix $(a_{n\nu})$ aus absolut konvergenten Nullfolgen bestehen[12]).

Wir bezeichnen die Menge aller Folgen $s = \{s_\nu\}$ (bzw. Reihen $\sum a_\nu$), welche durch (1) in absolut konvergente Folgen bzw. absolut konvergente Nullfolgen transformiert werden, als Wirkfeld bzw. Nullwirkfeld und verwenden dafür die Bezeichnungen $|\mathfrak{A}|$ bzw. $|\mathfrak{A}|_0$. Wir schreiben kurz

$$s \in |\mathfrak{A}|, \qquad \sum a_\nu \in |\mathfrak{A}| \tag{8}$$

(entsprechend bei $|\mathfrak{A}|_0$) und nennen s absolut $\mathfrak{A}$-limitierbar und $\sum a_\nu$ absolut $\mathfrak{A}$-summierbar (bzw. absolut zu Null limitierbar und summierbar).

Zur Erklärung der im folgenden behandelten Fragestellung gehen wir von dem Konvergenzkriterium von Du Bois-Reymond und Dedekind aus[13]). Nach diesem Kriterium ist eine Reihe $\sum a_\nu b_\nu$ sicherlich konvergent, wenn $\sum a_\nu$ konvergiert und wenn die Folge $\{b_\nu\}$ absolut konvergiert. Dieses Kriterium läßt sich auf zweierlei Weise verallgemeinern. Einmal können wir die gewöhnliche Konvergenz der Reihe $\sum a_\nu$ durch einen Konvergenzbegriff im Sinne der Limitierungstheorie ersetzen, zum anderen können wir die absolute Limitierbarkeit der Folge $\{b_\nu\}$ an Stelle ihrer absoluten Konvergenz verlangen.

[11]) $\delta_{nn} = 1$, $\delta_{n\nu} = 0$ für $\nu \neq n$.

[12]) Bei gewöhnlicher Summierbarkeit entspricht dieser Bedingung die Spaltenbedingung Sp_0: $a_{n\nu} \to 0$ $(n \to \infty, \ \nu \text{ fest})$.

[13]) Vgl. etwa Knopp [9], S. 324.

Verallgemeinerungen der zuerst genannten Art wurden von mehreren Autoren durchgeführt[14]), mit Verallgemeinerungen der zweiten Art wollen wir uns in dieser Arbeit beschäftigen.

Im einzelnen werden wir nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen fragen, welche eine Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ bzw. $\{\bar{\varepsilon}_\nu\}$ erfüllen muß, damit (bei gegebenem Verfahren $\mathfrak{A}$) die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \varepsilon_\nu \quad \text{bzw.} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu \tag{9}$$

für alle $s=\{s_\nu\}\in|\mathfrak{A}|\ (\in|\mathfrak{A}_0|)$ bzw. $\sum a_\nu \in |\mathfrak{A}|\ (\in|\mathfrak{A}|_0)$ konvergiert, oder durch ein gegebenes permanentes Matrixverfahren $\mathfrak{B}$ summierbar ist. Derartige Faktoren nennen wir *Summierbarkeitsfaktoren.*

2. Hilfssätze.

In diesem Paragraphen wollen wir, zum Teil unter Verwendung funktionalanalytischer Hilfsmittel, einige für das folgende wichtige Hilfssätze beweisen.

2.1. Lemma 2. *Es sei $\{s_\nu\}$ eine absolut konvergente Nullfolge und $\{\beta_\nu\}$ sei eine beschränkte Folge. Dann ist*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu \Delta s_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu s_\nu \quad \textit{mit} \quad \alpha_\nu = \Delta \beta_\nu . \tag{10}$$

Beide Summen existieren.

Lemma 3. *Es sei $\{s_\nu\}$ eine absolut konvergente Nullfolge und die Folge $\{\alpha_\nu\}$ erfülle die Bedingung $\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu = O(1)$. Dann ist*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu s_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu \Delta s_\nu \textit{ mit } \beta_0 = 0,\ \beta_n = -\sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_\nu \textit{ für } n \geqq 1 . \tag{11}$$

Beide Summen existieren. Die Beziehung (11) *bleibt richtig, wenn β_n durch $\beta_n + c$ $(n=0, 1, \ldots)$ ersetzt wird.*

Die Beweise folgen unmittelbar durch Anwendung partieller Summation. Im folgenden werden wir die Umformungen (10) und (11) des öfteren verwenden, ohne jedesmal erneut auf diese Hilfssätze hinzuweisen.

2.2. Lemma 4. *Eine Transformation*[15]) $\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ *führt genau dann jede absolut konvergente Nullfolge $\{s_\nu\}$ über in eine konvergente Folge, wenn die*

[14]) Für CESÀROsche Verfahren unter anderem von ANDERSEN, BOHR, BOSANQUET, CHAPMAN, HARDY, KNOPP, KOJIMA, LORENTZ, I. SCHUR, für gewisse NÖRLUND-Verfahren von C. N. MOORE, für gewisse RIESZsche Verfahren von JURKAT und für allgemeine Matrixverfahren von ZELLER [15] und dem Verfasser. Vgl. die bei PEYERIMHOFF [13] zitierte Literatur. Eine etwas andere Fragestellung, bei der die absolute Konvergenz bzw. absolute Summierbarkeit der Reihe $\sum a_\nu \varepsilon_\nu$ untersucht wird, findet man bei FEKETE [4] und BOSANQUET [3].

[15]) In den Lemmas 4—7 wird nicht vorausgesetzt, daß $a_{n\nu}=0$ bzw. $\bar{a}_{n\nu}=0$ für $\nu > n$ ist.

folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$|\sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu}| \leqq K \quad (k \geqq 0,\ n \geqq 0,\ K \text{ unabhängig von } k \text{ und } n), \tag{12}$$

$$a_{n\nu} \to \alpha_\nu \quad (n \to \infty,\ \nu \text{ fest}). \tag{13}$$

Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu s_\nu \qquad \left(\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu = O(1)\right). \tag{14}$$

Lemma 5. *Eine Transformation* $\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ *führt genau dann jede absolut konvergente Nullfolge* $\{s_\nu\}$ *über in eine beschränkte Folge, wenn die Bedingung* (12) *erfüllt ist.*

Lemma 6. *Eine Transformation* $\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{a}_{n\nu} a_\nu$ *führt genau dann jede absolut konvergente Reihe* $\sum a_\nu$ *mit der Summe Null über in eine konvergente Folge, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$$|\bar{a}_{n0} - \bar{a}_{n\,k+1}| \leqq K \quad (k \geqq 0,\ n \geqq 0,\ K \text{ unabhängig von } k \text{ und } n), \tag{15}$$

$$\Delta_\nu \bar{a}_{n\nu} \to \alpha_\nu \quad (n \to \infty,\ \nu \text{ fest}). \tag{16}$$

Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} a_\mu. \tag{17}$$

Lemma 7. *Eine Transformation* $\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{a}_{n\nu} a_\nu$ *führt genau dann jede absolut konvergente Reihe* $\sum a_\nu$ *mit der Summe Null über in eine beschränkte Folge, wenn die Bedingung* (15) *erfüllt ist.*

Zum Beweis bemerken wir zunächst, daß Lemma 4 aus Lemma 6 und Lemma 5 aus Lemma 7 folgt (nach Lemma 3). Wir müssen also nur Lemma 6 und 7 beweisen. Eine einfache Rechnung zeigt, daß die Bedingungen (15) und (16) in Lemma 6 die Konvergenz von σ_n nach sich ziehen; Entsprechendes gilt bei Lemma 7. Ist die Folge $\{\sigma_n\}$ in Lemma 6 konvergent für alle betrachteten $\sum a_\nu$, dann ist auch (16) erfüllt, da die absolut konvergenten Reihen $\sum a_\nu^{(k)}$ mit $a_k^{(k)} = 1$, $a_{k+1}^{(k)} = -1$, $a^{(k)} = 0$ sonst $(k = 0, 1, \ldots)$ die Summe Null besitzen und in die konvergenten Folgen $\sigma_n(k) = \Delta_k \bar{a}_{n\,k}$ übergehen. Wir müssen also nur noch den Nachweis erbringen, daß in Lemma 7 aus der Beschränktheit der σ_n die Bedingung (15) folgt.

Es ist

$$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{a}_{n\nu} a_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\bar{a}_{n\nu} - \bar{a}_{n0}) a_\nu \quad (\sum a_\nu = 0 \text{ und absolut konvergent}). \tag{18}$$

Ist $\sigma_n = O(1)$ für alle absolut konvergenten Reihen $\sum a_\nu$ mit der Summe Null, dann gilt sogar

$$\sigma_n^* = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\bar{a}_{n\nu} - \bar{a}_{n0}) a_\nu = O(1) \quad (n \to \infty) \tag{19}$$

für alle absolut konvergenten Reihen $\sum a_\nu$, da das Glied a_0 in diesen Reihen nicht auftritt. Jedes σ_n^* ist ein lineares Funktional im BANACH-Raum l der absolut konvergenten Reihen[16]) und aus $\sigma_n^* = O(1)$ folgt (BANACH [1], S. 80, th. 5), daß die Normen dieser linearen Funktionale beschränkt sind, d.h. es ist (15) erfüllt. Damit ist der Beweis erbracht.

2.3. Lemma 8. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine normale Transformation*[17]). *Ist eine Matrix $(b_{n\nu})$ so beschaffen, daß*

$$B_n(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu} s_\nu \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{20}$$

für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ existiert und für $n \to \infty$ gegen einen Wert $B(s)$ strebt, so gibt es eine Folge $\{\alpha_\nu\}$ mit $\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu = O(1)$ $(n \to \infty)$ und eine beschränkte Folge $\{\beta_\nu\}$, so daß

$$B(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \sigma_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu \Delta \sigma_\nu \quad \left(\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu\right) \tag{21}$$

für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ gilt.

Wir wollen, ehe wir zum Beweis übergehen, die folgende Bezeichnung einführen:

Ist $\mathfrak{A}$ eine normale Transformation, so gibt es eine inverse Transformation $\mathfrak{A}'$, deren Matrix mit $(a'_{n\nu})$ bezeichnet sei; es gilt dann die Beziehung

$$\sum_{\varrho=\nu}^{n} a_{n\varrho} a'_{\varrho\nu} = \sum_{\varrho=\nu}^{n} a'_{n\varrho} a_{\varrho\nu} = \delta_{n\nu} \quad (0 \leq \nu \leq n). \tag{22}$$

Im folgenden werden inverse Matrizen stets in dieser Weise (Anhängen eines Striches) gekennzeichnet.

Beweis von Lemma 8. Es ist

$$B_n(s) = \lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=0}^{k} b_{n\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} a'_{\nu\mu} \sigma_\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{\mu=0}^{k} \sigma_\mu \sum_{\nu=\mu}^{k} b_{n\nu} a'_{\nu\mu} = \lim_{k\to\infty} \sum_{\mu=0}^{k} c_{k\mu}(n)\, \sigma_\mu .$$

Bei festem n stellt die ganz rechts stehende Summe eine Transformation der absolut konvergenten Nullfolge $\{\sigma_n\}$ in eine konvergente Folge dar; nach Lemma 4 [Beziehung (14)] gibt es also zu jedem n $(n = 0, 1, \ldots)$ eine Folge $\{\alpha_{n\nu}\}$, so daß

$$B_n(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n\nu} \sigma_\nu \tag{23}$$

ist. Erneute Anwendung von Lemma 4 lehrt, daß es eine Folge $\{\alpha_\nu\}$ mit $\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu = O(1)$ gibt, so daß (21) erfüllt ist. Die Behauptung über $\{\beta_\nu\}$ ergibt sich aus Lemma 3.

---

[16]) Aus der Konvergenz der Reihen (19) für alle $\sum a_\nu \in l$ folgt nämlich nach bekannten Sätzen (vgl. BANACH [1], S. 86), daß $\bar{a}_{n\nu} - \bar{a}_{n0} = O(1)$ $(\nu \to \infty,\ n$ fest) ist; deshalb ist σ_n^* ein lineares Funktional in l.

[17]) Das heißt es ist $a_{n\nu} = 0$ für $\nu > n$ und $a_{nn} \neq 0$.

2.4. Wir nennen eine normale Transformation $\mathfrak{A}$ *absolut perfekt*, wenn sie die Bedingung (7) erfüllt und wenn es zu jedem $s \in |\mathfrak{A}|_0$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine abbrechende Folge $g = \{g_\nu\}$ ($g_\nu = 0$ für $\nu > \nu_0$) gibt, so daß für

$$\sigma_n(s-g) = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu}(s_\nu - g_\nu) \tag{24}$$

die Beziehung

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\overline{\Delta}_n \sigma_n(s-g)| < \varepsilon \tag{25}$$

gilt.

Lemma 9. *Eine normale Transformation $\mathfrak{A}$ ist genau dann absolut perfekt, wenn sie die Bedingung (7) erfüllt und wenn die Beziehungen*

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \beta_n \overline{\Delta}_n a_{n\nu} = 0, \qquad \beta_n = O(1) \tag{26}$$

stets

$$\beta_n = const. \tag{27}$$

nach sich ziehen.

Beweis. Das Wirkfeld $|\mathfrak{A}|_0$ ist ein normierter Vektorraum, wenn für jedes $s \in |\mathfrak{A}|_0$ eine Norm durch $||s|| = \sum_{n=0}^{\infty} |\overline{\Delta}\sigma_n|$ erklärt wird. Durch $\{s_\nu\} \leftrightarrow \{\overline{\Delta}\sigma_\nu\}$ wird nämlich eine eineindeutige Beziehung zwischen $|\mathfrak{A}|_0$ und dem Raum l_n der absolut konvergenten Reihen mit der Summe Null hergestellt. Der Raum l_n ist als (Vektor)-Teilraum des BANACH-Raumes l ein normierter Vektorraum und daraus ergibt sich die angegebene Normierung von $|\mathfrak{A}|_0$[18]). Das allgemeine lineare Funktional in l_n wird gegeben durch[19])

$$f(\sum a_\nu) = \sum \beta_n a_n, \qquad \beta_n = O(1). \tag{28}$$

Auf Grund der oben erwähnten eineindeutigen Beziehung zwischen l_n und $|\mathfrak{A}|_0$ wird das allgemeine lineare Funktional in $|\mathfrak{A}|_0$ gegeben durch[20])

$$f(s) = \sum \beta_n \overline{\Delta}\sigma_n, \qquad \beta_n = O(1). \tag{29}$$

Die Transformation $\mathfrak{A}$ ist genau dann absolut perfekt, wenn sie die Bedingung (7) erfüllt und wenn die abbrechenden Folgen in $|\mathfrak{A}|_0$ (der Norm nach) überall dicht liegen, d.h. wenn die Folgen $s^k = \{\delta_{k\nu}\}$ ($k = 0, 1, \ldots$) in $|\mathfrak{A}|_0$ eine Grundmenge bilden[21]) (d.h. die Linearkombinationen der s^k liegen in $|\mathfrak{A}|_0$ überall dicht). Die Folgen s^k liegen nach einem bekannten Satz (BANACH [*1*], S. 58 th. 7) genau dann in $|\mathfrak{A}|_0$ überall dicht, wenn jedes lineare Funktional $f(s)$ aus $|\mathfrak{A}|_0$, für das $f(s^k) = 0$ ($k = 0, 1, \ldots$) gilt, in $|\mathfrak{A}|_0$ identisch verschwindet.

[18]) Vgl. etwa PEYERIMHOFF [*13*], Lemma 2.1.

[19]) Durch (28) wird nämlich das allgemeine lineare Funktional in l gegeben und daraus folgt nach dem Satz von HAHN-BANACH (BANACH [*1*], S. 55, th. 2), daß (28) auch das allgemeine lineare Funktional in l_n darstellt.

[20]) Vgl. etwa PEYERIMHOFF [*13*], Lemma 2.3.

[21]) Da $\mathfrak{A}$ die Bedingung (7) erfüllt, ist $s^k \in |\mathfrak{A}|_0$.

Diese Forderung ist aber gleichbedeutend mit (26) und (27), wenn man (29) beachtet.

Lemma 10. *Eine normale Transformation $\mathfrak{A}$ ist sicherlich absolut perfekt, wenn sie absolut permanent ist und wenn für die inverse Matrix (a'_{nv}) gilt*

$$\sum_{n=v}^{\infty} |a'_{nv}| < +\infty \quad (v = 0, 1, \ldots). \tag{30}$$

Beweis. Die Folge $\{\beta_n\}$ erfülle die Bedingungen (26). Es ist

$$0 = \sum_{v=\mu}^{\infty} a'_{v\mu} \sum_{n=v}^{\infty} \beta_n \Delta_n a_{nv} = \sum_{n=\mu}^{\infty} \beta_n \Delta_n \sum_{v=\mu}^{n} a_{nv} a'_{v\mu} = \beta_\mu - \beta_{\mu+1},$$

also ist (27) erfüllt[22]).

2.5. Lemma 11[23]). *Die Transformation $\mathfrak{A}$ sei normal und absolut perfekt. Es sei (c_{nv}) eine Matrix mit konvergenten Spalten ($c_{nv} \to c_v$ für $n \to \infty$, v fest). Existiert*

$$C_n(s) = \sum_{v=0}^{\infty} c_{nv} s_v \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{31}$$

für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ und ist

$$C_n(s) = O(1) \quad (n \to \infty) \tag{32}$$

für jedes $s \in |\mathfrak{A}|_0$, dann ist die Folge $\{C_n(s)\}$ sogar konvergent. Ist $c_v = 0$ $(v = 0, 1, \ldots)$, so ist $\{C_n(s)\}$ für jedes $s \in |\mathfrak{A}|_0$ eine Nullfolge.

Beweis. Für jedes feste n ist $C_n(s) = \lim_{k\to\infty} \sum_{v=0}^{k} c_{nv} s_v$ vorhanden. Nach Lemma 8 gibt es also zu jedem n eine Folge $\{\gamma_{nv}\}$, so daß $\left(\text{mit } \sigma_n = \sum_{v=0}^{n} a_{nv} s_v\right)$

$$C_n(s) = \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_{nv} \sigma_v(s) \qquad \left(\sum_{v=0}^{k} \gamma_{nv} = O(1) \quad \text{für} \quad k \to \infty, \ n \text{ fest}\right)$$

ist. (Man setze in Lemma 8 $b_{kv} = c_{nv}$ für $v \leq k$, $b_{kv} = 0$ für $v > k$.) Diese Transformation ist für jede absolut konvergente Nullfolge beschränkt, also gibt es nach Lemma 5 eine Zahl K, so daß

$$\left| \sum_{v=0}^{k} \gamma_{nv} \right| \leq K \quad (n \geq 0, \ k \geq 0) \tag{33}$$

ist. Zu gegebenem $s \in |\mathfrak{A}|_0$ und zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine abbrechende Folge g so daß $\sum |\Delta \sigma_v(s-g)| < \varepsilon$ ist, da $\mathfrak{A}$ absolut perfekt ist. Es ist

$$|C_n(s) - C_m(s)| \leq |C_n(s-g)| + |C_n(g) - C_m(g)| + |C_m(s-g)| = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}.$$

Wegen

$$|C_n(s-g)| = \left| \sum_{v=0}^{\infty} \gamma_{nv} \sigma_v(s-g) \right| \leq \sum_{v=1}^{\infty} |\Delta \sigma_v(s-g)| \left| \sum_{\mu=0}^{v-1} \gamma_{n\mu} \right| \leq K\varepsilon$$

[22]) Die Vertauschung der Summation ist zulässig, da nach (2), (26) und (30)

$$\sum_{v=\mu}^{\infty} |a'_{v\mu}| \sum_{n=v}^{\infty} |\beta_n| \, |\Delta_n a_{nv}| < +\infty$$

ist.

[23]) Vgl. hierzu JURKAT-PEYERIMHOFF [7], Satz 2.

ist $I \leqq K\,\varepsilon$ und $III \leqq K\,\varepsilon$ [nach (33)] und II wird für genügend große n und m beliebig klein, da $C_n(g)$ für $n \to \infty$ nach Voraussetzung konvergiert. Daraus folgt die Konvergenz von $C_n(s)$. Ist $c_\nu = 0$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$, dann folgt aus

$$|C_n(s)| \leqq |C_n(s-g)| + |C_n(g)| \quad (|C_n(s-g)| \leqq K\,\varepsilon),$$

daß $C_n(s) \to 0$ $(n \to \infty)$, da $C_n(g)$ eine Nullfolge ist.

3. Notwendige Bedingungen für Summierbarkeitsfaktoren.

Wir werden in diesem Paragraphen eine notwendige Bedingung für Summierbarkeitsfaktoren aufstellen[24]). Die im folgenden betrachteten Transformationen $\mathfrak{B}$ werden in der RF-Form dargestellt durch $\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{b}_{n\nu} a_\nu$ (nicht notwendig zeilenfinit) und es sei

$$\bar{b}_{n\nu} \to 1 \quad (n \to \infty,\ \nu \text{ fest}). \tag{34}$$

Die Bedingung (34) ist z.B. erfüllt, wenn $\mathfrak{B}$ permanent ist.

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine normale Transformation welche die Bedingung (7) erfüllt. Die Transformation $\mathfrak{B}$ erfülle (34). Ist die Reihe $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ $\mathfrak{B}$-summierbar für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$, dann gibt es eine beschränkte Folge $\{\beta_n\}$, so daß*

$$\varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \beta_n \bar{\Delta}_n a_{n\nu} \quad (\nu = 0, 1, \ldots) \tag{35}$$

ist[25]).

Der Beweis beruht auf Lemma 8. Nach den Voraussetzungen existiert nämlich $B_n^*(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\bar{b}_{n\nu}\,\varepsilon_\nu)\,s_\nu$ $(n = 0, 1, \ldots)$ für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ und strebt für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert $B^*(s)$. Es gibt also eine beschränkte Folge $\{\beta_n\}$, so daß

$$B^*(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\bar{b}_{n\nu}\,\varepsilon_\nu)\,s_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \bar{\Delta}\sigma_n \tag{36}$$

ist. Wählt man für s die speziellen Folgen $s^k = \{\delta_{k\nu}\}$ $[s^k \in |\mathfrak{A}|_0$ wegen (7)], so folgt aus (36) wegen (34) die Beziehung (35).

Bemerkungen. Ist $\mathfrak{A}$ sogar absolut permanent und ist die Reihe $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ $\mathfrak{B}$-summierbar für alle $s \in |\mathfrak{A}$, so ist außer (35) noch die folgende Bedingung erfüllt:

$$\sum \varepsilon_\nu \text{ ist } \mathfrak{B}\text{-summierbar}. \tag{37}$$

Die Folge $s = e = \{1, 1, 1, \ldots\}$ ist nämlich absolut konvergent, also ist $e \in |\mathfrak{A}|$ und daraus folgt (37).

---

[24]) Für gewöhnliche Summierbarkeitsfaktoren wurden ähnliche Überlegungen vom Verfasser durchgeführt [vgl. Fußnote [14])]. Erweiterungen für FK-Räume gab Zeller [15] an.

[25]) Gleichbedeutend mit dieser Behauptung ist die folgende: Es gibt eine Folge $\{\alpha_n\}$ mit $\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu = O(1)$, so daß

$$\varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} \quad (\nu = 0, 1, \ldots)$$

ist.

Wir werden in § 8 eine Klasse von Transformationen betrachten, bei denen die Bedingung (35) für die Konvergenz bzw. $\mathfrak{B}$-Summierbarkeit von $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ hinreichend ist. Erweiterungen auf das Wirkfeld $|\mathfrak{A}|$ (wenn $\mathfrak{A}$ absolut permanent ist) bedürfen dann keiner besonderen Untersuchung. Folgt nämlich aus (35) für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ die Konvergenz bzw. $\mathfrak{B}$-Summierbarkeit von $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$, so gilt dies, wenn noch (37) erfüllt ist, sogar für alle $s \in |\mathfrak{A}|$. Man kann nämlich jede Folge $s \in |\mathfrak{A}|$ zerlegen in

$$s = (s - e \lim_{n\to\infty} \sigma_n) + e \lim_{n\to\infty} \sigma_n = s_1 + s_2$$

mit $s_1 \in |\mathfrak{A}|_0$.

Ist $\mathfrak{A}$ absolut permanent, so folgt aus (35) die Beziehung

$$\sum_{\nu=0}^{k} \varepsilon_\nu = O(1) \quad (k \to \infty)^{26}). \tag{38}$$

Nach (2) ist nämlich

$$\sum_{\nu=0}^{k} \varepsilon_\nu = \sum_{n=0}^{k} \beta_n \Delta_n \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \beta_n \Delta_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} = O(1) \quad (k \to \infty).$$

Die Bedingung (37) folgt nicht aus (35), auch wenn $\mathfrak{A}$ absolut permanent ist. Dies erkennt man, wenn man für $\mathfrak{A}$ die Einheitsmatrix wählt; hier ist $\varepsilon_\nu = \beta_\nu - \beta_{\nu+1}$. (In diesem Fall folgt aus der Konvergenz von $\sum \varepsilon_\nu$ die Konvergenz von $\{\beta_\nu\}$; im allgemeinen Fall trifft dies, wie Beispiele zeigen, nicht zu.)

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{A}$ eine normale Transformation welche die Bedingung (7) erfüllt. Die Transformation $\mathfrak{B}$ erfülle (34). Ist die Reihe $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ $\mathfrak{B}$-summierbar für alle $\sum a_\nu \in |\mathfrak{A}|_0$, dann gibt es eine beschränkte Folge $\{\beta_n\}$, so daß*

$$\Delta \bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \beta_n \Delta_n a_{n\nu} \quad (\nu = 0, 1, \ldots) \tag{39}$$

ist.

Bevor wir zum Beweis übergehen, wollen wir an die Beziehung (39) einige Bemerkungen anknüpfen. Aus (39) folgt, daß

$$\bar{\varepsilon}_0 - \bar{\varepsilon}_{k+1} = \sum_{\nu=0}^{k} \sum_{n=\nu}^{\infty} \beta_n \Delta_n a_{n\nu} = \sum_{n=0}^{k} \beta_n \Delta \bar{a}_{n0} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \beta_n \Delta_n (\bar{a}_{n0} - \bar{a}_{nk+1}) \tag{40}$$

ist. Aus Konvergenzgründen dürfen wir die ganz rechts stehende Summe nicht als Differenz zweier Summen schreiben. Dies ist jedoch möglich, wenn $\mathfrak{A}$ absolut permanent ist. In diesem Falle folgt nämlich aus (6) und (2), daß

$$\sum_{n=\varrho}^{\infty} |\Delta_n \bar{a}_{n\varrho}| \leq M \quad (\varrho = 0, 1, \ldots) \tag{41}$$

ist. Setzt man $\bar{\varepsilon}_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \Delta_n \bar{a}_{n0} = \alpha$, so folgt aus (40) die Beziehung

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \beta_n \Delta_n \bar{a}_{n\nu} \quad (\nu = 0, 1, \ldots) \tag{42}$$

[26]) Aus (38) folgt, daß $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ für alle absolut konvergente Nullfolgen $\{s_\nu\}$ konvergiert.

und da $\sum_{n=\nu}^{\infty} \Delta_n \bar{a}_{n\nu} = \lim_{k\to\infty} \bar{a}_{k\nu} = 1$ ist, folgt schließlich

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \gamma_n \Delta_n \bar{a}_{n\nu} \quad (\gamma_n = O(1),\ \nu = 0, 1, \ldots). \tag{43}$$

Fügt man also zu den Voraussetzungen in Satz 2 noch hinzu, daß $\mathfrak{A}$ absolut permanent ist, so läßt sich die Behauptung dieses Satzes ersetzen durch: *Es gibt eine beschränkte Folge $\{\gamma_n\}$, so daß* (43) *gilt.*

Der Beweis von Satz 2 verläuft ähnlich wie der Beweis von Satz 1. Für jedes $n \geq 0$ und alle $\sum a_\nu \in |\mathfrak{A}|_0$ existiert

$$B_n^*(\sum a_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\bar{b}_{n\nu} \varepsilon_\nu)\, a_\nu = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{k-1} s_\nu \Delta_\nu (\bar{b}_{n\nu} \varepsilon_\nu) + s_k \bar{b}_{nk} \varepsilon_k \right) \quad \left(k \geq 1,\ s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \right),$$

daher gibt es nach Lemma 8 zu jedem n eine Folge $\{\gamma_{n\nu}\}$ mit $\sum_{\nu=0}^{k} \gamma_{n\nu} = O(1)$ $(k \to \infty)$, so daß

$$B_n^*(\sum a_\nu) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_{n\nu} \sigma_\nu \tag{44}$$

ist. Erneute Anwendung von Lemma 8 lehrt, daß es eine beschränkte Folge $\{\beta_n\}$ gibt, so daß

$$B^*(\sum a_\nu) = \lim_{n\to\infty} B_n^*(\sum a_\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \Delta \sigma_n \tag{45}$$

ist. Für die speziellen Reihen $\sum a_\nu^{(k)} \in |\mathfrak{A}|_0$ $(a_k^{(k)} = 1,\ a_{k+1}^{(k)} = -1,\ a_\nu^{(k)} = 0$ sonst) folgt (39) aus (45) wegen (34).

Wir bemerken noch, daß aus (43) für absolut permanentes $\mathfrak{A}$ die Beziehung

$$\bar{\varepsilon}_\nu = O(1) \tag{46}$$

folgt. Dies ergibt sich unmittelbar aus (43) wegen (41).

Satz 3. *Voraussetzungen wie bei Satz 1. Außerdem sei die Transformation $\mathfrak{A}$ absolut perfekt. Erfüllt die Folge $\{\varepsilon_\nu\}$ die Bedingung* (35) *und ist $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ $\mathfrak{B}$-summierbar für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$, so gilt die Beziehung*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{b}_{n\nu} s_\nu \varepsilon_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \Delta_n \sigma_n \tag{47}$$

für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$.

Beweis. Nach Lemma 8 gibt es eine beschränkte Folge $\{\gamma_n\}$, so daß

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{b}_{n\nu} s_\nu \varepsilon_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \Delta \sigma_n \tag{48}$$

ist. Für die Folgen $s^k = \{\delta_{k\nu}\}$ ist die Beziehung (47) richtig, also ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\gamma_n - \beta_n) \Delta \sigma_n(s) = 0$$

für $s = s^k$, d.h. es ist

$$\sum_{n=k}^{\infty} (\gamma_n - \beta_n) \Delta_n a_{nk} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{49}$$

Aus (49) folgt, da $\mathfrak{A}$ absolut perfekt ist, die Beziehung $\gamma_n - \beta_n = \text{const}$; für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ ist also (wegen $\sum \Delta \sigma_n = 0$) die Beziehung (47) richtig.

In derselben Weise kann ein entsprechender Satz für Reihen $\sum a_\nu \in |\mathfrak{A}|_0$ aufgestellt werden.

4. Ein Abschätzungssatz.

Wir betrachten in diesem Paragraphen normale Transformationen $\mathfrak{A}$ mit der Eigenschaft

$$(50) \qquad a_{n\nu} \geqq 0 \quad (\nu \leqq n), \qquad a_{n\nu} - a_{n-1,\nu} = \Delta_n a_{n\nu} \leqq 0 \quad (\nu < n).$$

Sind diese Bedingungen erfüllt und ist $a_{n\nu} = o(1)$ $(n \to \infty,\ \nu$ fest), dann ist auch die Bedingung (7) erfüllt. Aus den Bedingungen (50) lassen sich Eigenschaften der inversen Matrix $(a'_{n\nu})$ ableiten.

Satz 4. *Erfüllt eine normale Transformation $\mathfrak{A}$ die Bedingungen* (50), *so ist*

$$(51) \qquad \sum_{\nu=\mu}^{n} a'_{n\nu} \geqq 0 \quad (\mu = 0, 1, \ldots,\ n = 0, 1, \ldots).$$

Die Summe in (51) stellt ein Stück einer Zeilensumme der inversen Matrix dar; dabei ist es wesentlich, daß das Diagonalglied in dieser Summe auftritt. Bei den Betragsabschätzungen der folgenden Sätze ist die Ungleichung (51) von Wichtigkeit.

Der Beweis von (51) wird durch Induktion nach fallendem μ (bei festem n) erbracht. Für $\mu = n$ ist die Behauptung wegen $a'_{nn} = 1/a_{nn}$ richtig. Der Induktionsschluß beruht auf folgender Identität:

$$0 = \sum_{\nu=\varrho}^{n} a'_{n\nu} a_{\nu\varrho} = a_{\varrho\varrho} \sum_{\mu=\varrho}^{n} a'_{n\mu} + \sum_{\nu=\varrho+1}^{n} \Delta_\nu a_{\nu\varrho} \sum_{\mu=\nu}^{n} a'_{n\mu} = \mathrm{I} + \mathrm{II} \quad (\varrho < n).$$

Ist (51) bereits für $\mu = n, n-1, \ldots \varrho + 1$ als richtig erkannt, dann gilt wegen (50) die Ungleichung $\mathrm{II} \leqq 0$, also $\mathrm{I} \geqq 0$, d.h. (51) ist auch für $\mu = \varrho$ richtig[27]).

Satz 5. *Erfüllt eine normale Transformation $\mathfrak{A}$ die Bedingungen* (50) *und ist $a_{n\nu} = o(1)$ $(n \to \infty,\ \nu$ fest), so gilt die Abschätzung*

$$(52) \qquad \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu - \sum_{\nu=0}^{k} a_{n-1,\nu} s_\nu \right| = \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \Delta_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu \right| \leqq \sum_{n=0}^{k} |\Delta \sigma_n| \quad (k \geqq 0).$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, daß die linke Seite von (52) wegen (50) existiert. Es ist

$$\sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} a'_{\nu\mu} \sigma_\mu = \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} a'_{\nu\mu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \Delta \sigma_\lambda = \sum_{\lambda=0}^{k} \Delta \sigma_\lambda \sum_{\nu=\lambda}^{k} a_{n\nu} \sum_{\mu=\lambda}^{\nu} a'_{\nu\mu},$$

also

$$\Delta_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu = \sum_{\lambda=0}^{k} \Delta \sigma_\lambda \sum_{\nu=\lambda}^{k} \left(- \Delta_n a_{n\nu} \sum_{\mu=\lambda}^{\nu} a'_{\nu\mu} \right).$$

[27]) Unter der Annahme gewisser Bedingungen über die Zeilen der Matrix $(a_{n\nu})$ konnte Herr JURKAT sogar Aussagen über die Vorzeichen der Elemente $a'_{n\nu}$ erzielen. (Noch nicht veröffentlicht.)

Nach Satz 4 ist die ganz rechts stehende Summe positiv. Für $n \geqq k+1$ ist $-\overline{\Delta}_n a_{n\nu} \geqq 0$ nach (50). Wir können also in folgender Weise abschätzen:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \overline{\Delta}_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu \right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{k} |\overline{\Delta}\sigma_\lambda| \sum_{\nu=\lambda}^{k} -\overline{\Delta}_n a_{n\nu} \sum_{\mu=\lambda}^{\nu} a'_{\nu\mu}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{k} |\overline{\Delta}\sigma_\lambda| \sum_{\nu=\lambda}^{k} a_{k\nu} \sum_{\mu=\lambda}^{\nu} a'_{\nu\mu} = \sum_{\lambda=0}^{k} |\overline{\Delta}\sigma_\lambda| \sum_{\mu=\lambda}^{k} \sum_{\nu=\mu}^{k} a_{k\nu} a'_{\nu\mu}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{k} |\overline{\Delta}\sigma_\lambda| \sum_{\mu=\lambda}^{k} \delta_{k\mu} = \sum_{\lambda=0}^{k} |\overline{\Delta}\sigma_\lambda| \quad \text{w. z. b. w.}$$

5. Ein weiterer Abschätzungssatz.

Satz 6. *Erfüllt eine normale Transformation* $\mathfrak{A}$ *die Bedingungen* (50), *so gilt die Abschätzung*

$$\sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu} s_\nu| \leq \sum_{\nu=0}^{n} |\overline{\Delta}\sigma_\nu| \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{53}$$

Der Beweis folgt aus der Abschätzung (51). Es ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} |s_\nu| = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} \left| \sum_{\mu=0}^{\nu} a'_{\nu\mu} \sum_{\lambda=0}^{\mu} \overline{\Delta}\sigma_\lambda \right| = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} \left| \sum_{\lambda=0}^{\nu} \overline{\Delta}\sigma_\lambda \sum_{\mu=\lambda}^{\nu} a'_{\nu\mu} \right|$$

$$\leq \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} \sum_{\lambda=0}^{\nu} |\overline{\Delta}\sigma_\lambda| \sum_{\mu=\lambda}^{\nu} a'_{\nu\mu} = \sum_{\lambda=0}^{n} |\overline{\Delta}\sigma_\lambda| \sum_{\mu=\lambda}^{n} \sum_{\nu=\mu}^{n} a_{n\nu} a'_{\nu\mu}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{n} |\overline{\Delta}\sigma_\lambda| \sum_{\mu=\lambda}^{n} \delta_{n\mu} = \sum_{\lambda=0}^{n} |\overline{\Delta}\sigma_\lambda| \quad \text{w. z. b. w.}$$

Bemerkung. Aus dem Beweis des Satzes ist zu ersehen, daß die Ungleichung (53) schon dann richtig ist, wenn (bei positivem $a_{n\nu}$) gilt

$$\sum_{\nu=\lambda}^{n} a_{n\nu} \left| \sum_{\mu=\lambda}^{\nu} a'_{\nu\mu} \right| \leq 1 \quad (n \geq 0,\ 0 \leq \lambda \leq n).$$

6. Verschärfung der Abschätzungen.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine normale Transformation welche der Bedingung (7) genügt. Gilt für diese Transformation die Abschätzung (52), so ist

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \overline{\Delta}_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu \right| = O(1) \quad (k \to \infty) \tag{54}$$

für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ und eine analoge Beziehung folgt aus der Abschätzung (53). Ist $\mathfrak{A}$ absolut perfekt, so können diese Abschätzungen verschärft werden[28]).

Satz 7. *Erfüllt eine normale, absolut perfekte Transformation* $\mathfrak{A}$ *die Abschätzung* (52), *so gilt für alle* $s \in |\mathfrak{A}|_0$ *die Beziehung*

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \overline{\Delta}_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu \right| = o(1) \quad (k \to \infty). \tag{55}$$

[28]) Für die Abschätzung (52) folgt dies auch aus einem Satz von Zeller (Zeller [15], Satz 3.3).

Der Beweis beruht auf Lemma 11. Wir zeigen, daß (55) für jede fest gewählte Folge $s \in |\mathfrak{A}|_0$ richtig ist. Sei s^* eine derartige Folge. Nach Vorgabe einer Zahl k kann man die Menge der Zahlen $n \geqq k+1$ $(k \geqq 0)$ so in zwei Teilmengen $\mathfrak{N}^+(k)$ und $\mathfrak{N}^-(k)$ zerlegen, daß

$$\overline{\Delta}_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu^* \begin{cases} \geqq 0 & \text{für} \quad n \in \mathfrak{N}^+(k) \\ < 0 & \text{für} \quad n \in \mathfrak{N}^-(k) \end{cases}$$

ist. Es sei

$$f_k^+(s) = \sum_{n \in \mathfrak{N}^+(k)} \overline{\Delta}_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu, \qquad f_k^-(s) = \sum_{n \in \mathfrak{N}^-(k)} \overline{\Delta}_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu.$$

Für jedes $s \in |\mathfrak{A}|_0$ ist

$$|f_k^+(s)| \leqq \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \overline{\Delta}_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu \right| \leqq \sum_{n=0}^{k} |\overline{\Delta} \sigma_n| = O(1) \quad (k \to \infty) \tag{56}$$

und ebenso

$$|f_k^-(s)| = O(1) \quad (k \to \infty). \tag{56'}$$

Mit den Abkürzungen

$$b_{k\nu}^+ = \sum_{n \in \mathfrak{N}^+(k)} \overline{\Delta}_n a_{n\nu}, \qquad b_{k\nu}^- = \sum_{n \in \mathfrak{N}^-(k)} \overline{\Delta}_n a_{n\nu} \quad (\nu \leqq k)$$

ist

$$f_k^+(s) = \sum_{\nu=0}^{k} b_{k\nu}^+ s_\nu, \qquad f_k^-(s) = \sum_{\nu=0}^{k} b_{k\nu}^- s_\nu. \tag{57}$$

Die Transformation $\mathfrak{A}$ erfüllt die Bedingung (7), da sie absolut perfekt ist; also ist

$$|b_{k\nu}^+| \leqq \sum_{n=k+1}^{\infty} |\overline{\Delta}_n a_{n\nu}| = o(1) \quad (k \to \infty, \ \nu \text{ fest}). \tag{58}$$

Entsprechend gilt

$$|b_{k\nu}^-| = o(1) \quad (k \to \infty, \ \nu \text{ fest}). \tag{59}$$

Auf die Reihen (57) wenden wir Lemma 11 an. Wegen (56), (56'), (58) und (59) sind die Voraussetzungen dieses Lemmas erfüllt. Es gelten also die Beziehungen

$$f_k^+(s) = o(1), \qquad f_k^-(s) = o(1) \quad (k \to \infty) \tag{60}$$

für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$. Insbesondere ist also

$$f_k^+(s^*) - f_k^-(s^*) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \overline{\Delta}_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu^* \right| = o(1) \quad (k \to \infty) \quad \text{w. z. b. w.}$$

Satz 8. *Erfüllt eine normale, absolut perfekte Transformation $\mathfrak{A}$ die Abschätzung* (53), *so gilt für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ die Beziehung*

$$\sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu} s_\nu| = o(1) \quad (n \to \infty). \tag{61}$$

Der Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis von Satz 7. Wir nehmen zunächst an, daß $a_{n\nu} \geqq 0$ ist. Es sei $s^* \in |\mathfrak{A}|_0$ eine fest gewählte Folge. Wir zerlegen die Menge der natürlichen Zahlen in zwei Teilmengen $\mathfrak{N}^+$ und $\mathfrak{N}^-$;

dabei bestehe $\mathfrak{N}^+$ aus allen Zahlen ν mit $s_\nu^* \geqq 0$, $\mathfrak{N}^-$ aus dem Rest. Setzt man

$$f_n^+(s) = \sum_{\substack{\nu \leqq n \\ \nu \in \mathfrak{N}^+}} a_{n\nu} s_\nu, \qquad f_n^-(s) = \sum_{\substack{\nu \leqq n \\ \nu \in \mathfrak{N}^-}} a_{n\nu} s_\nu$$

so folgen durch ganz ähnliche Überlegungen, wie sie beim Beweis von Satz 7 angewandt wurden, die Beziehungen

$$f_n^+(s) = o(1), \qquad f_n^-(s) = o(1) \quad (s \in |\mathfrak{A}|_0,\ n \to \infty).$$

Es ist also

$$f_n^+(s^*) - f_n^-(s^*) = \sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu} s_\nu^*| = o(1).$$

Im allgemeinen Fall wird $\mathfrak{A}$ als Summe zweier Transformationen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ dargestellt, so daß $\mathfrak{A}_1$ nur nicht negative und $\mathfrak{A}_2$ nur nicht positive Elemente enthält.

Die eben durchgeführten Überlegungen legen die Frage nahe, ob die Abschätzungen (52) und (53) nicht so verschärft werden können, daß (bei absolut perfekter Transformation $\mathfrak{A}$) die Beziehungen (55) und (61) direkt abgelesen werden können. Diese Frage konnte bisher nur in einzelnen Spezialfällen beantwortet werden. So gilt z. B. für das CESÀROsche Verfahren C_1 die Beziehung

$$\sum_{n=k-1}^{\infty} \overline{\Delta}_n \sum_{\nu=0}^{k} \frac{s_\nu}{n+1} = |\sigma_k| \qquad \left(\sigma_n = \frac{1}{n-1} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu\right). \tag{62}$$

Dies ist eine Verschärfung von (52). Aus (62) folgt unmittelbar die Beziehung (55). Entsprechendes gilt für die Abschätzung (53) beim C_1-Verfahren.

In den Sätzen 7 und 8 darf die Voraussetzung, daß die betrachtete Transformation $\mathfrak{A}$ absolut perfekt ist, nicht weggelassen werden. Wir geben im folgenden ein Beispiel einer nicht absolut perfekten Transformation, welche absolut permanent ist und die Bedingungen (50), also auch die Abschätzungen (52) und (53) erfüllt, während die Verschärfungen (55) und (61) falsch sind. Die Transformation sei (in der FF-Form) gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ 0 & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{63}$$

Diese Transformation ist offenbar absolut permanent und erfüllt (50). Zum Nachweis, daß sie nicht absolut perfekt ist, verwenden wir Lemma 9. Die Bedingungen (26) gehen hier über in

$$\tfrac{1}{2}(\beta_\nu - \beta_{\nu+2}) = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots), \qquad \beta_\nu = O(1).$$

Diese Bedingungen sind z. B. erfüllt, wenn $\beta_0 = \beta_2 = \cdots = 1$, $\beta_1 = \beta_3 = \cdots = 2$ gewählt wird, während $\beta_n = \text{const}$ nicht gilt. Die Abschätzung (52) geht hier über in

$$\frac{1}{2}(|s_{k-1}| + |s_k|) \leqq \sum_{n=0}^{k} |\overline{\Delta}\sigma_n| \quad (k \geqq 1) \qquad \left(\sigma_n = \tfrac{1}{2}(s_n + s_{n-1})\ n \geqq 1,\ \sigma_0 = \frac{s_0}{2}\right). \tag{64}$$

Durch die Transformation (63) wird die Folge $\{s_\nu\}$ mit $s_\nu = (-1)^\nu$ $(\nu = 0, 1 \ldots)$ übergeführt in eine absolut konvergente Nullfolge, da $\sigma_0 = \frac{1}{2}$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = 0$ ist. Für diese Folge ist jedoch die Abschätzung (55) nicht richtig, da die linke Seite von (64) übergeht in $\frac{1}{2}(1+1) = 1 \neq o(1)$. Ebenso erkennt man, daß auch die Beziehung (61) nicht richtig ist[29]).

7. Größenordnung absolut limitierbarer Folgen.

Die Abschätzung (52) ermöglicht es, eine Aussage über die Größenbeschränkung absolut limitierbarer Folgen zu machen. Wir können sogar zeigen, daß die erhaltene Abschätzung die bestmögliche ist, so daß wir die genaue Größenbeschränkung der absolut limitierbaren Folgen gefunden haben.

Satz 9. *Erfüllt eine normale, absolut perfekte Transformation* $\mathfrak{A}$ *die Abschätzung* (52), *so gilt für alle* $s \in |\mathfrak{A}|_0$ *die Beziehung*

$$s_n = o\left(\frac{1}{a_{nn}}\right) \quad (n \to \infty). \tag{65}$$

Beweis. Aus der Abschätzung (52) folgt für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ die Beziehung

$$\sum_{n=r+1}^{\infty} \Delta_n \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu} s_\nu = -\sum_{\nu=0}^{k} a_{r\nu} s_\nu = O(1) \quad (r \geq k,\ k, r \to \infty).$$

Es ist also

$$a_{rr} s_r = \sum_{\nu=0}^{r} a_{r\nu} s_\nu - \sum_{\nu=0}^{r-1} a_{r\nu} s_\nu = O(1) \quad (r \to \infty).$$

Die Beziehung (65) folgt nun aus Lemma 11, da $\mathfrak{A}$ absolut perfekt ist.

Bemerkung. Dem vorstehenden Beweis entnimmt man, daß die Beziehung (65) auch unmittelbar aus Satz 7 gefolgert werden kann.

Die Abschätzung (65) ist die bestmögliche. Es gilt nämlich der

Satz 10. *Ist* $\mathfrak{A}$ *eine normale Transformation und ist* $\{\eta_n\}$ *eine (positive) unbeschränkte Folge, dann gibt es ein* $s \in |\mathfrak{A}|_0$, *so daß*

$$s_n \neq o\left(\frac{1}{\eta_n}\right) \frac{1}{a_{nn}} \tag{66}$$

ist.

Beweis. Es ist $s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a'_{n\nu} \sigma_\nu$. Die Annahme, daß

$$\eta_n a_{nn} s_n = \sum_{\nu=0}^{n} (\eta_n a_{nn} a'_{n\nu}) \sigma_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} d_{n\nu} \sigma_\nu = o(1) \quad (n \to \infty)$$

[29]) Dieses Beispiel zeigt, daß hier die Verhältnisse anders liegen als bei gewöhnlicher Summierbarkeit, denn dort folgt aus der Gültigkeit des Mittelwertsatzes

$$\left| \sum_{\nu=0}^{m} a_{n\nu} s_\nu \right| \leq K |\sigma_{n'}| \quad (0 \leq n' \leq m \leq n)$$

die Perfektheit und damit eine Verschärfung des Mittelwertsatzes von O auf o, ähnlich wie bei (54) und (55). (Vgl. ZELLER [15] und JURKAT-PEYERIMHOFF [7].)

ist für jedes $s \in |\mathfrak{A}|_0$ würde nach Lemma 4 die Bedingung $d_{nn} = O(1)$, d.h. $\eta_n = O(1)$ (wegen $a'_{nn} = 1/a_{nn}$) nach sich ziehen. Die Folge $\{\eta_n\}$ sollte aber unbeschränkt sein. Es gibt also eine Folge $s \in |\mathfrak{A}|_0$, so daß (66) erfüllt ist[30]).

Bemerkung. Erfüllt eine Transformation $\mathfrak{A}$ die Voraussetzungen von Satz 9 und ist sie absolut permanent, so folgt aus $s \in |\mathfrak{A}|$, $\sigma_n = a + o(1)$ die Beziehung

$$s_n = a + o\left(\frac{1}{a_{nn}}\right)$$

und diese Abschätzung kann nicht verbessert werden.

8. Genaue Bedingungen für Summierbarkeitsfaktoren.

Wir haben in § 3 notwendige Bedingungen für Summierbarkeitsfaktoren ε_ν und $\bar{\varepsilon}_\nu$ angegeben. In diesem Paragraphen werden wir zeigen, daß diese Bedingungen für eine gewisse Klasse von Transformationen im allgemeinen auch hinreichend sind (bzw. nach Hinzufügen einer weiteren einfachen notwendigen Bedingung hinreichend sind).

Satz 11. *Erfüllt eine normale, absolut perfekte Transformation $\mathfrak{A}$ die Abschätzung* (52) *und ist $\mathfrak{B}$ ein permanentes Matrixverfahren, so ist die Reihe $\sum_\nu \varepsilon_\nu s_\nu$ genau dann $\mathfrak{B}$-summierbar für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$, wenn es eine beschränkte Folge $\{\beta_n\}$ gibt, so daß*

$$\varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \beta_n \overline{\Delta}_n a_{n\nu} \tag{67}$$

ist.

Beweis. Die Notwendigkeit von (67) folgt aus Satz 1. Wir zeigen, daß (67) hinreichend ist. Wenn wir zeigen, daß die Bedingung (67) die Beschränktheit der Teilsummen von $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ nach sich zieht, wenn also $\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \varepsilon_\nu = O(1)$ $(n \to \infty)$ ist für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$, so ist der Beweis erbracht, da dann nach Lemma 11 die Konvergenz dieser Reihe[31]) und damit auch ihre $\mathfrak{B}$-Summierbarkeit folgt.

Die Beschränktheit der Teilsummen ergibt sich folgendermaßen: Nach (67) ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \varepsilon_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \beta_\mu \overline{\Delta}_\mu a_{\mu\nu} = \sum_{\mu=0}^{n} \beta_\mu \sum_{\nu=0}^{\mu} \overline{\Delta}_\mu a_{\mu\nu} s_\nu + \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \beta_\mu \sum_{\nu=0}^{n} \overline{\Delta}_\mu a_{\mu\nu} s_\nu = \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

Es ist

$$\mathrm{I} = \sum_{\mu=0}^{n} \beta_\mu \overline{\Delta} \sigma_\mu = O(1) \quad (n \to \infty),$$

und aus der Abschätzung (52) folgt die Beziehung

$$|\mathrm{II}| = O(1) \sum_{\mu=n+1}^{\infty} \left| \overline{\Delta}_\mu \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} s_\nu \right| = O\left(\sum_{\nu=0}^{n} |\overline{\Delta} \sigma_\mu| \right) = O(1) \quad \text{w. z. b. w.}$$

---

[30]) Dieser Satz stellt eine Erweiterung von Satz 5 bei Jurkat-Peyerimhoff [6] dar.

[31]) Man erkläre in Lemma 11 die Matrix $(c_{n\nu})$ durch $c_{n\nu} = \varepsilon_\nu$ für $\nu \leqq n$, $c_{n\nu} = 0$ für $\nu > n$.

Bemerkung zum Beweis. Die Konvergenz der Reihe $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ hätten wir auch durch Anwendung der Beziehung (55) an Stelle von (52) erschließen können. (Vgl. ZELLER [15].)

Satz 12. *Voraussetzungen wie bei Satz 11. Außerdem sei das Verfahren* $\mathfrak{B}$ *normal. Die Reihe* $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ *ist genau dann* $\mathfrak{B}$*-summierbar für alle* $\sum a_\nu \in |\mathfrak{A}|_0$, *wenn es eine beschränkte Folge* $\{\beta_n\}$ *gibt, so daß*

$$\Delta \bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \beta_n \Delta_n a_{n\nu} \tag{68}$$

ist, und wenn die Folge $\{s_n \bar{\varepsilon}_n\}$ $\mathfrak{B}$*-limitierbar*[32]) *ist (zum Werte Null) für alle* $s \in |\mathfrak{A}|_0$.

Beweis. Die Notwendigkeit von (68) folgt aus Satz 2. Ferner ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu \Delta \bar{\varepsilon}_\nu + s_n \bar{\varepsilon}_n = \mathrm{I} + \mathrm{II} \quad \left(s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\right).$$

Nach Satz 11 konvergiert I für $n \to \infty$ und ist deshalb auch $\mathfrak{B}$-summierbar. Zusammen mit (68) ist also die $\mathfrak{B}$-Limitierbarkeit von II notwendig und hinreichend. Ist aber $\sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu} s_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ $(n \to \infty)$ konvergent für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$, so ist nach Lemma 11 sogar $\sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu} s_\nu \varepsilon_\nu = o(1)$ $(n \to \infty)$ für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$, da $b_{n\nu} \bar{\varepsilon}_\nu = o(1)$ $(n \to \infty,\ \nu$ fest) ist.

Bemerkungen. In Satz 12 können wir die Bedingung, daß $s_n \bar{\varepsilon}_n$ $\mathfrak{B}$-limitierbar ist, ersetzen durch die Forderung, daß diese Folge $\mathfrak{B}$-beschränkt ist. Nach Lemma 11 folgt daraus die $\mathfrak{B}$-Limitierbarkeit.

Erfüllt eine Transformation $\mathfrak{A}$ die Voraussetzungen von Satz 12 und ist sie absolut permanent, so kann die Bedingung (68) ersetzt werden durch die Bedingung (43) von § 3.

In Satz 12 ist die Bedingung über die $\mathfrak{B}$-Limitierbarkeit der Folge $\{s_\nu \bar{\varepsilon}_\nu\}$ noch nicht ganz befriedigend; man wird eine Bedingung wünschen, in der die Folge $\{s_\nu\}$ nicht mehr auftritt. Im folgenden werden wir in zwei Fällen, nämlich für konvergenzgleiches $\mathfrak{B}$ und (im nächsten Paragraphen) für $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ eine von $\{s_\nu\}$ freie Bedingung angeben.

Satz 13. *Erfüllt eine normale, absolut perfekte Transformation* $\mathfrak{A}$ *die Abschätzung* (52), *so ist die Reihe* $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ *genau dann konvergent für alle* $\sum a_\nu \in |\mathfrak{A}|_0$, *wenn* (68) *gilt und wenn*

$$\bar{\varepsilon}_n = O(a_{nn}) \tag{69}$$

ist.

[32]) Wird $\mathfrak{B}$ in der FF- bzw. RF-Form dargestellt durch die normalen Matrizen $(b_{n\nu})$ bzw. $(\bar{b}_{n\nu})$, dann ist eine Folge $\{s_\nu\}$ $\mathfrak{B}$-limitierbar, wenn $\sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu} s_\nu$ für $n \to \infty$ konvergiert und eine Reihe $\sum a_\nu$ ist $\mathfrak{B}$-summierbar, wenn $\sum_{\nu=0}^{n} \bar{b}_{n\nu} a_\nu$ für $n \to \infty$ konvergiert. Ist $\mathfrak{B}$ permanent, dann ist $b_{n\nu} = o(1)$ $(n \to \infty,\ \nu$ fest) und $\bar{b}_{n\nu} - 1 = o(1)$ $(n \to \infty,\ \nu$ fest).

Zum Beweis müssen wir nur zeigen, daß die Bedingung (69) mit der Konvergenz (gegen Null) von $s_n \bar{\varepsilon}_n$ für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$ gleichbedeutend ist. Dies folgt aber unmittelbar aus den Überlegungen des § 7, da die genaue Größenbeschränkung der s_n gerade $o(1/a_{nn})$ ist.

9. Ein Analogon zu den BOHR-HARDYschen Sätzen.

In der Theorie der gewöhnlichen Summierbarkeit gibt der Satz von BOHR-HARDY die genauen Faktoren ε_ν an, welche jede C_k-summierbare Reihe $\sum a_\nu$ in eine C_k-summierbare Reihe $\sum a_\nu \varepsilon_\nu$ überführen[33]). Kürzlich wurde eine gewisse Erweiterung dieses Satzes für eine ganze Klasse von permanenten Verfahren bewiesen[34]). Für eine Klasse absolut permanenter Verfahren kann man einen entsprechenden Satz beweisen.

Satz 14. *Voraussetzung. Es sei $\mathfrak{A}$ eine normale Transformation mit den Eigenschaften: $\mathfrak{A}$ ist permanent, absolut permanent, absolut perfekt und erfüllt die Abschätzungen* (52) *und* (53).

Behauptung. *Die Reihe $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ ist genau dann $\mathfrak{A}$-summierbar für alle $\sum a_\nu \in |\mathfrak{A}|_0$, wenn es eine beschränkte Folge $\{\beta_n\}$ gibt, so daß*

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \beta_n \bar{\Delta}_n \bar{a}_{n\nu} \tag{70}$$

ist.

Der Beweis folgt aus Satz 12 (vgl. die Bemerkung zu Satz 12). Wir müssen nur zeigen, daß $s_n \bar{\varepsilon}_n$ $\mathfrak{A}$-beschränkt ist für alle $s \in |\mathfrak{A}|_0$. Aus (70) folgt, daß $\bar{\varepsilon}_\nu = O(1)$ ist [vgl. § 3, (46)]. Wegen (53) ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} \bar{\varepsilon}_\nu s_\nu = O(1) \sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu} s_\nu| = O(1) \quad (n \to \infty) \quad \text{für alle} \quad s \in |\mathfrak{A}|_0 \text{ w.z.b.w.}$$

Bemerkung. Wir hätten den Beweis auch durch Anwendung von Satz 8 führen können; dabei hätte sich direkt die $\mathfrak{A}$-Limitierbarkeit von $s_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ ergeben.

10. Anwendungen auf bewichtete arithmetische Mittel.

Durch ein Verfahren $M(p_n)$ bewichteter arithmetischer Mittel wird jeder Folge $\{s_\nu\}$ eine neue Folge $\{\sigma_n\}$ zugeordnet durch die Vorschrift

$$\sigma_n = \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu s_\nu \qquad \left(p_\nu > 0,\ P_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu,\ P_n \to \infty \right). \tag{71}$$

Jedes Verfahren $M(p_n)$ ist permanent und nach Lemma 1 absolut permanent [es genügt also auch der Bedingung (7)]; außerdem sind die Bedingungen (50) erfüllt, so daß auch die Ungleichungen (52) und (53) richtig sind. Aus der Umkehrtransformation $s_n = \frac{1}{p_n} \bar{\Delta} P_n \sigma_n$ folgt nach Lemma 10, daß

[33]) Vgl. BOSANQUET [2] und die dort zitierte Literatur.

[34]) JURKAT-PEYERIMHOFF [6], Satz 11.

jedes Verfahren $M(p_n)$ absolut perfekt ist. Aus diesen Überlegungen folgt, daß die Voraussetzungen der Sätze 11 bis 14 für jedes Verfahren $M(p_n)$ erfüllt sind, wir können also diese Sätze auf bewichtete arithmetische Mittel anwenden.

Im vorliegenden Falle können jedoch die Bedingungen (67) und (68) umgeformt und durch wesentlich einfachere ersetzt werden. Wir wollen zunächst diese Umformungen durchführen.

Wird $\mathfrak{A} = M(p_n)$ gesetzt, dann ist (67) gleichbedeutend mit den Bedingungen

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu = O(1) \quad (n \to \infty), \qquad \varepsilon_n = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right). \tag{72}$$

Die erste dieser Bedingungen folgt nach allgemeinen Überlegungen [Bemerkung zu Satz 1, (38)] aus (67) und die zweite ergibt sich aus der Abschätzung

$$|\varepsilon_\nu| = O(1)\left(\frac{p_\nu}{P_\nu} + p_\nu \sum_{n=\nu+1}^{\infty} \left|\Delta_n \frac{1}{P_n}\right|\right) = O\left(\frac{p_\nu}{P_\nu}\right).$$

Umgekehrt folgt die Bedingung (67) wieder aus (72). Setzt man nämlich $\alpha_n = P_n \Delta \frac{\varepsilon_n}{p_n}$, dann folgt aus (72) die Beziehung

$$\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu = \sum_{\nu=0}^{n+1} \varepsilon_\nu - \frac{P_{n+1}}{p_{n+1}} \varepsilon_{n+1} = O(1) \quad (n \to \infty);$$

ferner ist

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \frac{p_\nu}{P_n} = p_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} \Delta \frac{\varepsilon_n}{p_n} = \varepsilon_\nu \qquad \left(\text{da } \frac{\varepsilon_n}{p_n} = o(1) \text{ ist}\right).$$

Damit ist gezeigt [vgl. die Fußnote [25])], daß die Bedingung (67) aus den Bedingungen (72) folgt.

Mit den Bedingungen (72) können wir also den Satz 11 für den vorliegenden Spezialfall folgendermaßen formulieren:

Satz 15. *Es sei $\mathfrak{B}$ ein permanentes Matrixverfahren. Die Reihe $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ ist genau dann $\mathfrak{B}$-summierbar für alle $s \in |M(p_n)|_0$, wenn die Bedingungen (72) erfüllt sind.*

Für $\mathfrak{A} = M(p_n)$ ist die Bedingung (68) gleichwertig mit den Bedingungen

$$\bar{\varepsilon}_n = O(1), \qquad \Delta \bar{\varepsilon}_n = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right) \quad (n \to \infty). \tag{73}$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus den eben durchgeführten Überlegungen, wenn dort stets ε_n durch $\Delta \bar{\varepsilon}_n$ ersetzt wird. In diesem Fall geht (72) über in (73). Auch die Bedingung (70) ist gleichwertig mit (73), da für absolut permanentes $\mathfrak{A}$ die Bedingungen (70) und (68) gleichwertig sind.

Mit den Bedingungen (73) können wir den Satz 12 für den vorliegenden Spezialfall folgendermaßen formulieren:

Satz 16. *Es sei $\mathfrak{B}$ ein normales permanentes Matrixverfahren. Dann ist die Reihe $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ genau dann $\mathfrak{B}$-summierbar für alle $\sum a_\nu \in |M(p_n)|_0$, wenn die*

Bedingungen (73) *erfüllt sind und wenn die Folge* $\{s_n \bar{\varepsilon}_n\}$ $\mathfrak{B}$*-limitierbar ist (zum Wert Null) für alle* $s \in |M(p_n)|_0$.

Für $\mathfrak{A} = M(p_n)$ geht die Bedingung (69) über in

$$\bar{\varepsilon}_n = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right). \tag{74}$$

Ist nun die Folge $\{p_n\}$ so beschaffen, daß

$$\frac{p_{n+1}}{P_{n+1}} = O\left(\frac{p_n}{P_n}\right) \tag{75}$$

ist, so sind die Bedingungen (73) erfüllt für jede Folge, die (74) erfüllt. Aus dem Satz 13 folgt also:

Satz 17. *Erfüllt die Folge* $\{p_n\}$ *die Bedingung* (75), *so ist*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{P_n} |a_n| < +\infty \tag{76}$$

für alle $\sum a_\nu \in |M(p_n)|_0$, *während*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \frac{p_n}{P_n} |a_n| < +\infty, \qquad \lambda_n \neq O(1) \quad (\lambda_n > 0) \tag{77}$$

nicht für alle $\sum a_\nu \in |M(p_n)|_0$ *richtig ist*[35]).

Die Bedingung (75) ist z. B. erfüllt, wenn p_n monoton fällt.

Satz 18. *Die Reihe* $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ *ist genau dann* $M(p_n)$ *summierbar, für alle* $\sum a_\nu \in |M(p_n)|_0$, *wenn die Bedingungen* (73) *erfüllt sind.*

11. Anwendungen auf NÖRLUND-Verfahren.

Durch ein NÖRLUND-Verfahren $N(p_n)$ wird jeder Folge $\{s_\nu\}$ eine neue Folge $\{\sigma_n\}$ zugeordnet durch die Vorschrift

$$\sigma_n = \frac{1}{P_n} \sum_{\nu=0}^{n} p_{n-\nu} s_\nu \qquad \left(p_0 = 1,\ p_\nu > 0,\ P_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu,\ \frac{p_n}{P_n} \to 0 \ (n \to \infty)\right). \tag{78}$$

(In diesem Paragraphen wollen wir unter $\{p_n\}$ stets eine Folge mit diesen Eigenschaften verstehen.)

Die zu (78) inverse Transformation erhält man durch folgende Vorschrift: Die Folge $\{k_n\}$ sei erklärt durch[36])

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n z^n = \left(\sum_n p_n z^n\right)^{-1}, \tag{79}$$

dann ist

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} k_{n-\nu} P_\nu \sigma_\nu. \tag{80}$$

---

[35]) Der Spezialfall $M(p_n) = C_1$ ist bekannt (KOGBETLIANTZ [11]).

[36]) Vgl. etwa HARDY [5]. Aus den Eigenschaften von p_n folgt, daß die Reihe $\sum p_n z^n$ im Einheitskreis konvergiert und im Nullpunkt nicht verschwindet.

Wir wollen im folgenden die allgemeinen Sätze der §§ 8 und 9 auf NÖRLUND-sche Verfahren anwenden. Zunächst werden wir zeigen, daß die Voraussetzungen jener Sätze (absolute Permanenz, absolute Perfektheit, usw.) bei gewissen Klassen von NÖRLUND-Verfahren erfüllt sind.

Lemma 12. *Erfüllt eine Folge* $\{p_n\}$ *die Bedingung*

$$p_{n+1} \leqq p_n \quad (n \geqq 0), \tag{81}$$

so ist das Verfahren $N(p_n)$ *absolut permanent*[37]) *und erfüllt die Bedingung* (50), *also auch die Abschätzungen* (52) *und* (53)[38]).

Beweis. Die Bedingung (50) folgt unmittelbar aus (81), da

$$0 < \frac{p_{n-\nu}}{P_n} \leqq \frac{p_{n-1-\nu}}{P_n} \leqq \frac{p_{n-1-\nu}}{P_{n-1}} \quad (n > \nu)$$

ist. Ferner ist für $\varrho \geqq 1$ und $n > \varrho$

$$\frac{1}{P_n}\sum_{\nu=\varrho}^{n} p_{n-\nu} = 1 - \sum_{\nu=0}^{\varrho-1}\frac{p_{n-\nu}}{P_n} \geqq 1 - \sum_{\nu=0}^{\varrho-1}\frac{p_{n-1-\nu}}{P_{n-1}} = \frac{1}{P_{n-1}}\sum_{\nu=\varrho}^{n-1} p_{n-1-\nu} > 0.$$

Daraus folgt nach Lemma 1 die absolute Permanenz des Verfahrens $N(p_n)$.

Das folgende Lemma von KALUZA[39]) ermöglicht es uns, eine Aussage über die absolute Perfektheit der Verfahren $N(p_n)$ zu machen.

Lemma 13. *Erfüllt eine Folge* $\{p_n\}$ *die Bedingungen* (81) *und*

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \geqq \frac{p_n}{p_{n-1}} \quad (n \geqq 1), \tag{82}$$

so besitzt die Folge $\{k_n\}$ *die folgenden Eigenschaften:*

$$k_n < 0\,(n \geqq 1), \quad k_0 = \frac{1}{p_0} = 1, \quad 0 \leqq \sum_{n=0}^{r} k_n \leqq 1 \quad (r \geqq 0). \tag{83}$$

Satz 19. *Erfüllt eine Folge* $\{p_n\}$ *die Bedingungen* (81) *und* (82), *so ist das Verfahren* $N(p_n)$ *absolut perfekt.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus Lemma 10, wenn man die Darstellung (80) der inversen Transformation beachtet; wegen (83) ist nämlich

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} |k_{n-\nu} P_\nu| \leqq 2P_\nu < +\infty.$$

Bevor wir den Satz 11 auf NÖRLUND-Verfahren anwenden, wollen wir die dort auftretende Bedingung (67) umformen. Erfüllt nämlich die Folge $\{p_n\}$ die Bedingungen (81) und (82), so sind die Bedingungen (67) [für $\mathfrak{A} = N(p_n)$] und $\varepsilon_n = o(1)$ $(n \to \infty)$ gleichwertig mit

$$\sum_{\nu=0}^{m} P_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} k_{n-\nu}\,\varepsilon_n = O(1) \quad (m \to \infty), \qquad \varepsilon_n = o(1) \quad (n \to \infty). \tag{84}$$

[37]) MEARS [12], S. 597.

[38]) Für wachsende p_n ist dieses Lemma nicht mehr richtig.

[39]) KALUZA [8], vgl. auch SZEGÖ [14] und HARDY [5], th. 22.

Zunächst zeigt eine einfache Rechnung, daß im vorliegenden Fall aus (67) die Beziehung

$$P_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} k_{n-\nu}\, \varepsilon_n = \beta_\nu - \beta_{\nu+1}$$

folgt (dabei ist zu beachten, daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} |k_\nu| < +\infty$ ist) und daraus folgt die erste Bedingung in (84). Umgekehrt folgt aus (84) wieder die Bedingung (67) und $\varepsilon_n = o(1)$ $(n \to \infty)$. Setzt man nämlich

$$\alpha_n = P_n \sum_{\mu=n}^{\infty} k_{\mu-n}\, \varepsilon_\mu,$$

so ist $\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu = O(1)$ $(m \to \infty)$ und ferner

$$\begin{aligned}\sum_{n=\nu}^{r} \alpha_n \frac{p_{n-\nu}}{P_n} &= \sum_{n=\nu}^{r} \frac{p_{n-\nu}}{P_n} P_n \sum_{\mu=n}^{\infty} k_{\mu-n}\, \varepsilon_\mu \\ &= \sum_{\mu=\nu}^{r} \varepsilon_\mu \sum_{n=\nu}^{\mu} k_{\mu-n}\, p_{n-\nu} + \sum_{\mu=r+1}^{\infty} \varepsilon_\mu \sum_{n=\nu}^{r} k_{\mu-n}\, p_{n-\nu} \\ &= \varepsilon_\nu + \sum_{\mu=r+1}^{\infty} \varepsilon_\mu \sum_{n=\nu}^{r} k_{\mu-n}\, p_{n-\nu}.\end{aligned}$$

Aus (83) folgt, daß

$$\sum_{n=\nu}^{r} k_{\mu-n}\, p_{n-\nu} \leqq 0 \quad (\mu > r) \qquad \text{und} \qquad -\sum_{\mu=r+1}^{\infty} k_{\mu-n} \leqq \sum_{\mu=n}^{r} k_{\mu-n} \quad (r \geqq n)$$

ist, so daß die folgende Abschätzung gilt:

$$\begin{aligned}\left| \sum_{\mu=r+1}^{\infty} \varepsilon_\mu \sum_{n=\nu}^{r} k_{\mu-n}\, p_{n-\nu} \right| &= o(1) \sum_{\mu=r+1}^{\infty} \sum_{n=\nu}^{r} (-k_{\mu-n})\, p_{n-\nu} \\ &= o(1) \sum_{n=\nu}^{r} p_{n-\nu} \sum_{\mu=n}^{r} k_{\mu-n} = o(1) \sum_{\mu=\nu}^{r} \sum_{n=\nu}^{\mu} k_{\mu-n}\, p_{n-\nu} = o(1).\end{aligned}$$

Es ist also $\sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \frac{p_{n-\nu}}{P_n} = \varepsilon_\nu$ w. z. b. w.

Wir bemerken, daß aus (67) die Beziehung $\varepsilon_n = o(1)$ $(n \to \infty)$ folgt, wenn das Verfahren $\mathfrak{A}$ die Bedingungen (50), $a_{n\nu} = o(1)$ $(n \to \infty$, ν fest) und

$$a_{nn} = o(1) \quad (n \to \infty) \tag{85}$$

erfüllt. Die Bedingung (50) ist nach Lemma 12 für $N(p_n)$ erfüllt, wenn die Folge $\{p_n\}$ die Bedingung (81) erfüllt und (85) ist richtig, wenn $P_n \to \infty$ gilt.

Durch Anwendung dieser Überlegungen ergibt sich aus Satz 11 der

Satz 20. *Erfüllt die Folge $\{p_n\}$ die Bedingungen* (81) *und* (82), *ist $P_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ und ist $\mathfrak{B}$ ein permanentes Matrixverfahren, so ist die Reihe $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ genau dann $\mathfrak{B}$-summierbar für alle $s \in |N(p_n)|_0$, wenn gilt:*

$$\sum_{\nu=0}^{m} P_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} k_{n-\nu}\, \varepsilon_\nu = O(1) \quad (m \to \infty) \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_n = o(1) \quad (n \to \infty). \tag{86}$$

In ähnlicher Weise kann man die Sätze 12, 13 und 14 auf NÖRLUNDsche Verfahren anwenden. Die oben vorgenommene Umformung der Bedingung (67) ergibt eine Umformung der Bedingung (68), wenn stets ε_n durch $\Delta\bar{\varepsilon}_n$ ersetzt wird.

12. Anwendungen auf CESÀROsche Verfahren.

Die CESÀROschen Verfahren C_α $(\alpha > 0)$ sind spezielle NÖRLUND-Verfahren $N(p_n)$ mit $p_n = \binom{n+\alpha-1}{n} = A_n^{\alpha-1}$. Ist $0 < \alpha \leqq 1$, so erfüllt die Folge $\{A_n^{\alpha-1}\}$ die Bedingungen (81) und (82); die Überlegungen des vorangehenden Paragraphen können also unmittelbar auf die Verfahren C_α mit $0 < \alpha \leqq 1$ angewandt werden. Andererseits können wir für die hier betrachtete spezielle Folge $\{p_n\}$ einige Ergebnisse vereinfachen.

Die durch (79) erklärte Folge $\{k_n\}$ geht für C_α über in $k_n = A_n^{-\alpha-1}$. Unter Verwendung des Symbols

$$\Delta^\alpha x_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n-\nu}^{-\alpha-1} x_n \tag{87}$$

folgt aus Satz 20 für die Verfahren C_α der

Satz 21. *Ist $\mathfrak{B}$ ein permanentes Matrixverfahren, so ist die Reihe $\sum s_\nu \varepsilon_\nu$ genau dann $\mathfrak{B}$-summierbar für alle $s \in |C_\alpha|_0$ mit $0 < \alpha \leqq 1$, wenn gilt*

$$\sum_{\nu=0}^{m} A_\nu^\alpha \Delta^\alpha \varepsilon_\nu = O(1) \quad (m \to \infty), \qquad \varepsilon_\nu = o(1) \quad (\nu \to \infty). \tag{88}$$

Die Bedingung (88) ist z.B. erfüllt für die Folgen

$$\varepsilon_n = \frac{1}{A_n^{1+\delta}} \quad (\delta > 0) \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_n = \frac{(-1)^n}{A_n^\beta} \quad (\beta \geqq \alpha). \tag{89}$$

Dies folgt unmittelbar aus den Beziehungen[40])

$$\Delta^\alpha \frac{1}{A_n^{1+\delta}} = \frac{1+\delta}{1+\delta+\alpha} \frac{1}{A_n^{1+\delta+\alpha}} \quad (\delta > 0) \tag{90}$$

---

[40]) Diese Beziehungen kann man etwa folgendermaßen beweisen: Für $\gamma > 0$ ist

$$\frac{1}{A_n^\gamma} = \gamma \int_0^1 (1-t)^{\gamma-1} t^n \, dt.$$

Also ist

$$\Delta^\alpha \frac{1}{A_n^{1+\delta}} = (1+\delta) \int_0^1 (1-t)^{\delta+\alpha} t^n \, dt = \frac{1+\delta}{1+\delta+\alpha} \frac{1}{A_n^{1+\delta+\alpha}}.$$

Ferner ist

$$\Delta^\alpha \frac{(-1)^n}{A_n^\beta} = \beta (-1)^n \int_0^1 (1+t)^\alpha (1-t)^{\beta-1} t^n \, dt.$$

Aus der Beziehung

$$(1+t)^\alpha = 2^\alpha + \alpha 2^{\alpha-1}(t-1) + O(1)(t-1)^2$$

für $0 \leqq t \leqq 1$ folgt schließlich (91) durch eine einfache Rechnung.

und

$$(91)\qquad \Delta^{\alpha}\frac{(-1)^n}{A_n^{\beta}} = \frac{2^{\alpha}(-1)^n}{A_n^{\beta}} + \frac{\beta}{\beta+1}\,\frac{(-1)^{n+1}\alpha\,2^{\alpha-1}}{A_n^{\beta+1}} + O\left(\frac{1}{n^{\beta+2}}\right) \quad (\beta \geqq \alpha).$$

Wir wollen im folgenden die Sätze 12, 13 und 14 auf die Verfahren C_α anwenden. In diesem Spezialfall können wir die Bedingung (68) bzw. die in diesem Fall damit gleichwertige Bedingung (70) wesentlich vereinfachen. Für $\mathfrak{A} = C_\alpha$ $(0 < \alpha \leqq 1)$ ist nämlich die Bedingung (70) gleichwertig mit

$$(92)\qquad \nu^{\alpha+1}\Delta^{\alpha}\frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{\nu} = O(1) \quad (\nu \geqq 1,\ \nu \to \infty), \qquad \bar{\varepsilon}_n = O(1) \quad (n \to \infty).$$

Die Beziehung $\bar{\varepsilon}_n = O(1)$ folgt allgemein aus (70). Ferner geht (70) für $\mathfrak{A} = C_\alpha$ über in

$$(93)\qquad \bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n-\nu}^{\alpha-1}\frac{\beta_n \nu}{n A_n^{\alpha}} \quad (\nu \geqq 1), \qquad \bar{\varepsilon}_0 = \beta_0,$$

d.h. es ist

$$\frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{\nu} = \sum_{n=\nu}^{\infty} A_{n-\nu}^{\alpha-1}\frac{\beta_n}{n A_n^{\alpha}} = \Delta^{-\alpha}\frac{\beta_\nu}{\nu A_\nu^{\alpha}} \quad (\nu \geqq 1).$$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß daraus die Beziehung $\Delta^{\alpha}\frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{\nu} = \frac{\beta_\nu}{\nu A_\nu^{\alpha}}$, d.h. die erste der Beziehungen (92) folgt.

Ist eine Folge $\{\bar{\varepsilon}_\nu\}$ so beschaffen, daß (92) erfüllt ist, so erklären wir eine beschränkte Folge $\{\beta_n\}$ durch

$$(94)\qquad \beta_\nu = \nu A_\nu^{\alpha}\Delta^{\alpha}\frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{\nu} \quad (\nu \geqq 1), \qquad \beta_0 = \varepsilon_0.$$

Nach einem bekannten Lemma von Andersen ist dann

$$\Delta^{-\alpha}\Delta^{\alpha}\frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{\nu} = \frac{\bar{\varepsilon}_\nu}{\nu} = \Delta^{-\alpha}\frac{\beta_\nu}{\nu A_\nu^{\alpha}} \quad (\nu \geqq 1)$$

und daraus folgt wieder (93). Aus (92) folgt also (70) für $\mathfrak{A} = C_\alpha$ $(0 < \alpha \leqq 1)$.

Mit diesen Überlegungen ergeben sich aus den Sätzen 12, 13 und 14 die folgenden Sätze:

Satz 22. *Ist $\mathfrak{B}$ ein permanentes normales Matrixverfahren, so ist die Reihe $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ genau dann $\mathfrak{B}$-summierbar für alle $\sum a_\nu \in |C_\alpha|_0$, $(0 < \alpha \leqq 1)$, wenn die Bedingungen (92) erfüllt sind und wenn die Folge $\{s_n \bar{\varepsilon}_n\}$ $\mathfrak{B}$-limitierbar ist zum Wert Null für alle $s \in |C_\alpha|_0$.*

Jede Folge $\bar{\varepsilon}_n = O\left(\frac{1}{A_n^{\alpha}}\right)$ erfüllt die Bedingungen (92), da

$$\sum_{\varrho=\nu}^{\infty} A_{\varrho-\nu}^{-\alpha-1}\,\frac{1}{\varrho}\,O\left(\frac{1}{A_\varrho^{\alpha}}\right) = O\left(\frac{1}{\nu^{\alpha+1}}\right)\sum_{\varrho=\nu}^{\infty}|A_{\varrho-\nu}^{-\alpha-1}| = O\left(\frac{1}{\nu^{\alpha+1}}\right)$$

ist. Aus Satz 13 folgt also der

Satz 23. *Für alle $\sum a_\nu \in |C_\alpha|_0$ $(0 < \alpha \leqq 1)$*[41] *ist*

$$(95)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|}{A_n^{\alpha}} < +\infty.$$

[41] Dieser Satz wurde zuerst von Kogbetliantz [11] bewiesen.

Satz 24. *Die Reihe* $\sum a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$ *ist genau dann* C_α*-summierbar* $(0<\alpha\leqq 1)$ *für alle* $\sum a_\nu \in |C_\alpha|_0$, *wenn die Bedingungen* (92) *erfüllt sind.*

Wir haben uns bisher auf Verfahren C_α mit $0<\alpha\leqq 1$ beschränkt. Für $\alpha>1$ sind die Abschätzungen (52) und (53) nicht mehr richtig. Wäre nämlich (52) für ein $\alpha>1$ erfüllt, so würde, wie man durch Einsetzen der speziellen Folge $\{s_\nu\}$ mit $s_k=1$, $s_\nu=0$ $(\nu\neq k)$ erkennt, die folgende Ungleichung richtig sein:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \bar{A}_n \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} \right| \leqq \frac{1}{A_k^\alpha}. \tag{96}$$

Eine einfache Überlegung zeigt, daß die linke Seite dieser Ungleichung von der Größenordnung $1/k$ ist, während die rechte Seite die Größenordnung $1/k^\alpha$ besitzt. Für $\alpha>1$ ist also (96) unmöglich. In ähnlicher Weise läßt sich zeigen, daß auch die Ungleichung (53) für $\alpha>1$ nicht mehr gilt.

Die Sätze dieses Paragraphen können trotzdem auf beliebige $\alpha>0$ erweitert werden. Dabei tritt nur noch eine weitere Bedingung über die Größenordnung der ε_ν bzw. $\bar{\varepsilon}_\nu$ hinzu. Wir wollen darauf später zurückkommen.

Literatur.

[1] Banach, S.: Théorie des opérations linéaires. Warszawa 1932. — [2] Bosanquet, L. S.: Note on the Bohr-Hardy theorem. J. Lond. Math. Soc. **17**, 166—173 (1942). — [3] Bosanquet, L. S.: Note on convergence and summability factors. J. Lond. Math. Soc. **20**, 39—48 (1945). — [4] Fekete, M.: Summabilitási factorsorozatok. Math. és term. ért. **35**, 309—324 (1917). — [5] Hardy, G. H.: Divergent series. Oxford 1949. — [6] Jurkat, W., u. A. Peyerimhoff: Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Z. **55**, 92—108 (1952). — [7] Jurkat, W., u. A. Peyerimhoff: Mittelwertsätze und Vergleichssätze für Matrixtransformationen. Math. Z. **56**, 152—178 (1952). — [8] Kaluza, Th.: Über die Koeffizienten reziproker Potenzreihen. Math. Z. **28**, 161—170 (1928). — [9] Knopp, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Berlin: Springer 1947. — [10] Knopp, K., u. G. G. Lorentz: Beiträge zur absoluten Limitierung. Arch. Math. **2**, 10—16 (1949). — [11] Kogbetliantz, E.: Sur les séries absolument sommables par la méthode des moyennes arithmétiques. Bull. Sci. math. (2) **49**, 234—256 (1925). — [12] Mears, F. M.: Absolute regularity and the Nörlund mean. Ann. of Math. **38**, 594—601 (1937). — [13] Peyerimhoff, A.: Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z. **55**, 23—54 (1952). — [14] Szegö, G.: Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Fejér über die Legendreschen Polynome. Math. Z. **25**, 172—187 (1926). — [15] Zeller, K.: Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Z. **55**, 55—70 (1952).

Gießen (Lahn), Mathematisches Institut der Justus Liebig-Hochschule.

(Eingegangen am 8. Juli 1952.)

Specht, W.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 291—335 (1953)

Zur Zahlentheorie der Polynome. IV.

Von
Wilhelm Specht.

Die zahlentheoretische Untersuchung ganzzahliger Polynome, die ich in einigen Arbeiten[1]) unter Beschränkung auf normierte Polynome durchgeführt habe, läßt sich, wie die vorliegende Arbeit zeigen soll, ohne allzu große Schwierigkeiten auf nichtnormierte Polynome übertragen, wodurch eine größere Tragweite der Theorie gewonnen wird. Gleichzeitig werde ich, da es keine zusätzliche Mühe verursacht, die Betrachtung auf Polynome in mehreren Unbestimmten ausdehnen.

Es seien $m \geqq 1$, $k \geqq 1$ natürliche Zahlen,

$$f(z,a) = \sum_{(\mu)} a_{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_k} z_0^{\mu_0} z_1^{\mu_1} \dots z_k^{\mu_k} \qquad (\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_k = m) \tag{1}$$

eine beliebige Form des Grades m in den $k+1$ Unbestimmten $z_0, z_1, \dots, z_k$ mit reellen (nicht sämtlich verschwindenden) Koeffizienten $a_{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_k}$. Ich nenne *Norm* $N(f)$ der Form den positiven Wert

$$N(f) = \Big(\sum_{(\mu)} a^2_{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_k}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Werden in der Darstellung (1) der Form $f(z,a)$ die Potenzprodukte der Unbestimmten $z_0, z_1, \dots, z_k$ lexikographisch angeordnet durch die Vorschrift:

$$z_0^{\mu_0} z_1^{\mu_1} \dots z_k^{\mu_k} \quad \textit{steht vor} \quad z_0^{\nu_0} z_1^{\nu_1} \dots z_k^{\nu_k},$$

wenn die erste nichtverschwindende unter den Differenzen

$$\mu_0 - \nu_0,\ \mu_1 - \nu_1, \dots, \mu_k - \nu_k$$

positiv ist, so läßt sich in eindeutiger Weise der *letzte* (von Null verschiedene) Koeffizient, der *Leitkoeffizient* der Form $f(z,a)$ und das letzte Glied der Summe (1), das *Leitglied* der Form $f(z,a)$ erklären. Bekanntlich ist das Leitglied (und damit auch der Leitkoeffizient) eines Produktes $f(z,a)\,g(z,b)$ zweier Formen das Produkt der Leitglieder (bzw. Leitkoeffizienten) der Faktoren.

Eine Form $f(z,a)$ möge kurz als *ganze* Form bezeichnet werden, wenn ihre Koeffizienten ganze rationale Zahlen sind, die nicht sämtlich verschwinden. Eine ganze Form $f(z,a)$ besitzt einen eindeutig bestimmten *Inhalt* $d(f)$, d.h. den größten gemeinschaftlichen Teiler aller Koeffizienten $a_{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_k}$:

$$d(f) = \text{g. g. T.}\,(a_{\mu_0 \mu_1 \dots \mu_k}) \qquad (\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_k = m). \tag{3}$$

[1]) Vgl. Specht, W.: Zur Zahlentheorie der Polynome. Sitzgsber. math.-naturwiss. Abt. bayr. Akad. Wiss. **1951**, 139—146. — Zur Zahlentheorie der Polynome. II, III. Math. Nachr. **7**, 105—126, 127—150 (1952). Weiterhin mit ZP II bzw. ZP III zitiert.

Bekanntlich ist der Inhalt $d(f\,g)$ eines Produktes $f(z, a)\,g(z, b)$ zweier Formen gleich dem Produkte der Inhalte der Faktoren:

$$d(f\,g) = d(f)\,d(g). \tag{4}$$

Insbesondere heißt eine ganze Form $f(z, a)$ *primitiv*, wenn ihr Leitkoeffizient positiv und ihr Inhalt $d(f) = 1$ ist. Das Produkt $f(z, a)\,g(z, b)$ zweier primitiver Formen ist wiederum eine primitive Form.

Nun bezeichne $\mathfrak{R}_{m,k}(x)$ für feste natürliche Zahlen $m \geqq 2$, $k \geqq 1$ und jedes reelle $x \geqq 1$ die Menge oder *Klasse*, $K_{m,k}(x)$ die *Anzahl* der ganzen Formen $f(z, a)$ des Grades m in $k+1$ Unbestimmten $z_0, z_1, \ldots, z_k$, die der *Normbedingung*

$$0 < N(f) \leqq x \tag{5}$$

unterliegen, wobei sinngemäß auch Formen, die sich lediglich um einen (rationalen) Faktor unterscheiden, als verschiedene Formen zu zählen sind. Entsprechend bezeichne $\mathfrak{R}^*_{m,k}(x)$ die Menge oder *Klasse*, $K^*_{m,k}(x)$ die *Anzahl* der primitiven Formen $f(z, a)$ der Klasse $\mathfrak{R}_{m,k}(x)$.

Die primitive Klasse $\mathfrak{R}^*_{m,k}(x)$ enthält nun eine wohlbestimmte Anzahl $I^*_{m,k}(x)$ von (im Körper der rationalen Zahlen) irreduziblen Formen und eine wohlbestimmte Anzahl $R^*_{m,k}(x)$ von reduziblen Formen:

$$K^*_{m,k}(x) = I^*_{m,k}(x) + R^*_{m,k}(x). \tag{6}$$

Gesucht werden, das ist das zu behandelnde Problem, Abschätzungen dieser Anzahlen in Abhängigkeit von der *Normschranke* $x \geqq 1$.

Im folgenden bezeichne $A_n(x)$ für jede natürliche Zahl $n \geqq 2$ und jedes reelle $x \geqq 1$ die Anzahl der Gitterpunkte in der (gelochten) n-dimensionalen Kugel

$$0 < y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 \leqq x^2 \tag{7}$$

vom Radius x im n-dimensionalen kartesischen Koordinatenraum. Bekanntlich gilt[2]), wenn noch zur Abkürzung

$$\alpha_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \tag{8}$$

gesetzt wird:

$$A_2(x) = \alpha_2\,x^2 + O(x^{\frac{2}{3}}), \tag{9.1}$$

$$A_3(x) = \alpha_3\,x^3 + O(x^{\frac{3}{2}}), \tag{9.2}$$

$$A_4(x) = \alpha_4\,x^4 + O(x^2 \log x), \tag{9.3}$$

$$A_n(x) = \alpha_n\,x^n + O(x^{n-2}) \quad \text{für} \quad n \geqq 5. \tag{9.4}$$

Es sind dies im Falle $2 \leqq n \leqq 4$ nicht die besten, bisher erhaltenen Abschätzungen; sie reichen aber für meine Zwecke aus, da wie sich zeigen wird allein

[2]) Einfachheitshalber verweise ich auf die in ZP II gemachten ausführlichen Literaturangaben.

in den beiden Fällen

$$k = 1,\ m = 2 \quad \text{und} \quad k = 1,\ m = 3$$

noch eine Verbesserung der Resultate möglich ist, eine Verbesserung, die wohl wesentlich kräftigerer Hilfsmittel als der hier verwendeten Methode bedarf.

Bezeichnet nun noch $\zeta(s)$ für jedes reelle $s > 1$ den Wert der RIEMANNschen Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \tag{10}$$

so gilt der

Hauptsatz 1. *Für $k \geq 2$, $m \geq 2$ ist mit $n = \binom{m+k}{m}$*

$$K^*_{m,k}(x) = \frac{\alpha_n}{2\zeta(n)} x^n + O(x^{n-2}), \tag{11.1}$$

$$I^*_{m,k}(x) = \frac{\alpha_n}{2\zeta(n)} x^n + O(x^{n-2}), \tag{11.2}$$

$$R^*_{m,k}(x) = O(x^{n-2}). \tag{11.3}$$

Wegen der bekannten Beziehung

$$A_n(x) = \alpha_n x^n + \Omega(x^{n-2}) \quad \text{für} \quad n \geq 5 \tag{12}$$

ist eine Verbesserung der Restabschätzung nicht möglich, mithin sind die Gln. (11) dieses Satzes als endgültig anzusehen.

Der Beweis des Hauptsatzes 1 ist nicht allzu schwer; etwas mehr Mühe macht der Fall $k = 1$, aber auch nur für die kleineren Grade $m \leq 4$. Führt man noch die Konstanten $\eta(m)$ für $m \geq 3$ ein durch die (konvergenten) Doppelreihen

$$\eta(m) = \sum_{(u,v)}{}' (u^{2m} + u^{2m-2} v^2 + \cdots + u^2 v^{2m-2} + v^{2m})^{-\frac{1}{2}}, \tag{13}$$

worin die Summe über alle ganzen Zahlen u, v mit $u^2 + v^2 > 0$ zu nehmen ist, so gilt der

Hauptsatz 2. *Für $k = 1$, $m \geq 5$ ist*

$$K^*_{m,1}(x) = \frac{\alpha_{m+1}}{2\zeta(m+1)} x^{m+1} + O(x^{m-1}), \tag{14.1}$$

$$R^*_{m,1}(x) = \frac{\alpha_m \eta(m)}{4\zeta^2(m)} x^m + O(x^{m-1}), \tag{14.2}$$

$$I^*_{m,1}(x) = \frac{\alpha_{m+1}}{2\zeta(m+1)} x^{m+1} - \frac{\alpha_m \eta(m)}{4\zeta^2(m)} x^m + O(x^{m-1}). \tag{14.3}$$

Auch in diesem Falle ist eine Verbesserung der Ergebnisse wegen der Beziehung (12) nicht mehr möglich.

Ebenso erhalten wir im Falle $k = 1$, $m = 4$ noch ein endgültiges Ergebnis; hingegen reicht in den Fällen $k = 1$, $m = 2, 3$ meine Methode nur noch dazu aus, den Gitterpunktsabschätzungen (9.2), (9.3) entsprechende Restabschätzungen zu erzielen.

Es gilt nämlich, wenn noch $\zeta'(s)$ für $s>1$ die Ableitung

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}$$

der RIEMANNschen Zetafunktion $\zeta(s)$ bezeichnet, der

Hauptsatz 3. *Für* $k=1;\ 2 \leqq m \leqq 4$ *ist*

$$K^*_{2,1}(x) = \frac{\alpha_3}{2\zeta(3)}\, x^3 + O(x^{\frac{8}{3}}), \tag{15.1}$$

$$\left\{ \begin{aligned} R^*_{2,1}(x) &= \frac{\alpha_2\beta_0}{2\zeta^2(2)}\, x^2 \log x + \\ &+ \left(\frac{\alpha_2\gamma_0}{4\zeta^2(2)} - \frac{\alpha_2\beta_0\zeta'(2)}{2\zeta^3(2)} - \frac{\alpha_2\beta_0}{4\zeta^2(2)} + \frac{\gamma_2}{8\zeta^2(2)} \right) x^2 + O(x^{\frac{8}{3}}), \end{aligned} \right. \tag{15.2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} I^*_{2,1}(x) &= \frac{\alpha_3}{2\zeta(3)}\, x^3 - \frac{\alpha_2\beta_0}{2\zeta^2(2)}\, x^2 \log x - \\ &- \left(\frac{\alpha_2\gamma_0}{4\zeta^2(2)} - \frac{\alpha_2\beta_0\zeta'(2)}{2\zeta^3(2)} - \frac{\alpha_2\beta_0}{4\zeta^2(2)} + \frac{\gamma_2}{8\zeta^2(2)} \right) x^2 + O(x^{\frac{8}{3}}) \end{aligned} \right. \tag{15.3}$$

mit den Konstanten

$$\beta_0 = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\varphi}} \approx 1{,}6858, \tag{15.4}$$

$$\gamma_0 = \lim_{x\to\infty} \left(\sum_{1\leq u^2+v^2\leq x} \frac{1}{\sqrt{u^4+u^2v^2+v^4}} - 2\beta_0 \log x \right), \tag{15.5}$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\log\left(1+\frac{1}{2}\sin\varphi\sin\psi\right)}{1+\frac{1}{2}\sin\varphi\sin\psi}\, d\varphi\, d\psi, \tag{15.6}$$

ferner

$$K^*_{3,1}(x) = \frac{\alpha_4}{2\zeta(4)}\, x^4 + O(x^2 \log x), \tag{16.1}$$

$$R^*_{3,1}(x) = \frac{\alpha_3\eta(3)}{4\zeta^2(3)}\, x^3 - \frac{\alpha_3\gamma_3}{4\zeta^3(2)}\, x^2 \log^2 x + O(x^2 \log x), \tag{16.2}$$

$$I^*_{3,1}(x) = \frac{\alpha_4}{2\zeta(4)}\, x^4 - \frac{\alpha_3\eta(3)}{4\zeta^2(3)}\, x^3 + \frac{\alpha_3\gamma_3}{4\zeta^3(2)}\, x^2 \log^2 x + O(x^2 \log x) \tag{16.3}$$

mit der Konstanten

$$\gamma_3 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi\, d\psi}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}+\cos^2\varphi\cos^2\psi\right)\left(\frac{1}{4}+\sin^2\varphi\sin^2\psi\right)}}, \tag{16.4}$$

schließlich

$$K^*_{4,1}(x) = \frac{\alpha_5}{2\zeta(5)}\, x^5 + O(x^3), \tag{17.1}$$

$$R^*_{4,1}(x) = \frac{\alpha_4\eta(4)}{4\zeta^2(4)}\, x^4 + \frac{\alpha_3\gamma_4}{2\zeta^2(3)}\, x^3 \log x + O(x^3), \tag{17.2}$$

$$I^*_{4,1}(x) = \frac{\alpha_5}{2\zeta(5)}\, x^5 - \frac{\alpha_4\eta(4)}{4\zeta^2(4)}\, x^4 - \frac{\alpha_3\gamma_4}{2\zeta^2(3)}\, x^3 \log x + O(x^3), \tag{17.3}$$

mit der Konstanten

$$\gamma_4 = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{(2-\cos^2\varphi\cos\psi)\,(2+\cos^2\varphi\cos\psi-\sin^2 2\varphi\,(1+\cos\psi))}}. \tag{17.4}$$

Die Hauptsätze 2 und 3 enthalten implizite auch die Lösung eines Problems, das der Ausgangspunkt der vorliegenden Untersuchungen war:

Es bezeichne $\mathfrak{R}_m^*(x)$ die *Klasse*, $K_m^*(x)$ die *Anzahl der normierten, primitiven, ganzzahligen Polynome*

$$f(z,a) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m \tag{18.1}$$

vom Grade $m \geqq 2$, deren Norm die Normschranke $x \geqq 1$ nicht überschreitet:

$$a_m > 0, \tag{18.2}$$

$$\text{g.g.T. } (a_0, a_1, \ldots, a_m) = 1, \tag{18.3}$$

$$0 < a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2 \leqq x^2. \tag{18.4}$$

Es bezeichne $I_m^*(x)$ die Anzahl der (im Körper der rationalen Zahlen) irreduziblen Polynome $f(z,a)$ aus $\mathfrak{R}_m^*(x)$. Dann gilt mit den bereits erklärten Konstanten:

Hauptsatz 4. *Für die Anzahlen $K_m^*(x)$, $I_m^*(x)$ bestehen die Gleichungen*

$$K_2^*(x) = \frac{\alpha_3}{2\zeta(3)}x^3 - \frac{\alpha_2}{2\zeta(2)}x^2 + O(x^{\frac{3}{2}}), \tag{19.1}$$

$$K_3^*(x) = \frac{\alpha_4}{2\zeta(4)}x^4 - \frac{\alpha_3}{2\zeta(3)}x^3 + O(x^2\log x), \tag{19.2}$$

$$K_m^*(x) = \frac{\alpha_{m+1}}{2\zeta(m+1)}x^{m+1} - \frac{\alpha_m}{2\zeta(m)}x^m + O(x^{m-1}) \quad \textit{für} \quad m \geqq 4 \tag{19.3}$$

und

$$\begin{cases} I_2^*(x) = \dfrac{\alpha_3}{2\zeta(3)}x^3 - \dfrac{\alpha_2\beta_0}{2\zeta^2(2)}x^2\log x - \\ \qquad - \left(\dfrac{\alpha_2\gamma_0}{4\zeta^2(2)} - \dfrac{\alpha_2\beta_0\zeta'(2)}{2\zeta^3(2)} - \dfrac{\alpha_2\beta_0}{4\zeta^2(2)} + \dfrac{\gamma_2}{8\zeta^2(2)}\right)x^2 + O(x^{\frac{3}{2}}), \end{cases} \tag{20.1}$$

$$I_3^*(x) = \frac{\alpha_4}{2\zeta(4)}x^4 - \frac{\alpha_3\eta(3)}{4\zeta^2(3)}x^3 + \frac{\alpha_3\gamma_3}{4\zeta^3(2)}x^2\log^2 x + O(x^2\log x), \tag{20.2}$$

$$I_4^*(x) = \frac{\alpha_5}{2\zeta(5)}x^5 - \frac{\alpha_4\eta(4)}{4\zeta^2(4)}x^4 - \frac{\alpha_3\gamma_4}{2\zeta^2(3)}x^3\log x + O(x^3), \tag{20.3}$$

$$I_m^*(x) = \frac{\alpha_{m+1}}{2\zeta(m+1)}x^{m+1} - \frac{\alpha_m\eta(m)}{4\zeta^2(m)}x^m + O(x^{m-1}) \quad \textit{für} \quad m \geqq 5. \tag{20.4}$$

Auch hier lassen sich in den Fällen $m = 2, 3$ durch kräftigere Methoden wohl noch Verbesserungen erzielen, während die Gleichungen für $m \geqq 4$ als endgültig anzusehen sind.

Im folgenden mögen $c_0, c_1, \ldots, c_{28}$ Konstanten bezeichnen, die, sofern nichts anderes ausdrücklich hervorgehoben wird, allein von den Zahlen k, m abhängen; im gleichen Sinne sind auch sämtliche O-Abschätzungen zu verstehen.

I.

Bekanntlich gibt es in $k+1$ Unbestimmten $z_0, z_1, \ldots, z_k$ genau

$$n = n(m,k) = \binom{m+k}{m} \tag{21.1}$$

verschiedene Potenzprodukte $z_0^{\mu_0} z_1^{\mu_1} \ldots z_k^{\mu_k}$ des Grades

$$m = \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_k;$$

ebenso bekannt ist die Gleichung

$$n(m,k) = n(m,k-1) + n(m-1,k). \tag{21.2}$$

Hieraus entnehmen wir die Ungleichungen

$$n(m,k) > n(m-1,k); \qquad n(m,k) > n(m,k-1) \tag{21.3}$$

und

$$n(m,k) \geqq 3 \qquad \text{für} \quad k \geqq 1;\ m \geqq 2, \tag{22.1}$$

$$n(m,k) \geqq 6 \qquad \text{für} \quad k \geqq 2;\ m \geqq 2, \tag{22.2}$$

$$n(s,k) \leqq n(m,k) - 3 \qquad \text{für} \quad k \geqq 2;\ m > s \geqq 1. \tag{22.3}$$

Denn nach (21.3) gilt

$$n(m,k) \geqq n(2,1) = \binom{3}{2} = 3 \quad \text{für} \quad k \geqq 1;\ m \geqq 2,$$

$$n(m,k) \geqq n(2,2) = \binom{4}{2} = 6 \quad \text{für} \quad k \geqq 2;\ m \geqq 2$$

und

$$\begin{aligned} n(s,k) &\leqq n(m-1,k) = n(m,k) - n(m,k-1) \\ &\leqq n(m,k) - n(2,1) = n(m,k) - 3 \quad \text{für} \quad k \geqq 2;\ m > s \geqq 1. \end{aligned}$$

Die der Klasse $\mathfrak{K}_{m,k}(x)$ aller ganzen Formen $f(z,a)$ des Grades m in $k+1$ Unbestimmten auferlegte Normbedingung

$$0 < N^2(f) = \sum_{(\mu)} a^2_{\mu_0 \mu_1 \ldots \mu_k} \leqq x^2$$

zeigt nun sogleich, daß die Anzahl $K_{m,k}(x)$ der Formen dieser Klasse mit der Gitterpunktsanzahl $A_n(x)$ der (gelochten) n-dimensionalen Kugel vom Radius x mit

$$n = n(m,k) = \binom{m+k}{m}$$

übereinstimmt. Folglich ist wegen (9)

$$K_{m,k}(x) = \alpha_n x^n + O(x^{n-2}) \qquad \text{für} \quad n = \binom{m+k}{m} \geqq 5, \tag{23.1}$$

$$K_{m,k}(x) = \alpha_4 x^4 + O(x^2 \log x) \qquad \text{für} \quad n = \binom{m+k}{m} = 4, \tag{23.2}$$

$$K_{m,k}(x) = \alpha_3 x^3 + O(x^{\frac{3}{2}}) \qquad \text{für} \quad n = \binom{m+k}{m} = 3. \tag{23.3}$$

Nach (22) ist

$$\binom{m+k}{m} = 4 \quad \text{nur für} \quad k = 1;\ m = 3 \tag{24.1}$$

$$\binom{m+k}{m} = 3 \quad \text{nur für} \quad k = 1;\ m = 2 \tag{24.2}$$

möglich, so daß, von diesen beiden Sonderfällen abgesehen, stets die erste Gl. (23.1) zutrifft.

Um hieraus die Anzahl $K^*_{m,k}(x)$ der primitiven Formen zu gewinnen, zerlege man die Klasse $\mathfrak{K}_{m,k}(x)$ in die Teilklassen $\mathfrak{K}^d_{m,k}(x)$ der Formen $f(z,a)$ vom Inhalte $d(f)=d$. Offensichtlich gilt für den Inhalt $d(f)$ einer Form $f(z,a)$ aus $\mathfrak{K}_{m,k}(x)$ die Ungleichung

$$1 \leqq d(f) \leqq N(f) \leqq x,$$

so daß die (mengentheoretische) Summe

$$\mathfrak{K}_{m,k}(x) = \sum_{1 \leqq d \leqq x} \mathfrak{K}^d_{m,k}(x) \tag{25}$$

eine Zerlegung von $\mathfrak{K}_{m,k}(x)$ in elementfremde Teilklassen darstellt.

Jede Form $f(z,a)$ aus $\mathfrak{K}^d_{m,k}(x)$ kann eindeutig in der Gestalt

$$f(z,a) = \pm d\, g(z,b)$$

mit einer primitiven Form $g(z,b)$ der Norm

$$N(g) = \frac{1}{d} N(f),$$

also einer Form $g(z,b)$ der primitiven Klasse $\mathfrak{K}^*_{m,k}\left(\frac{x}{d}\right)$ dargestellt werden; umgekehrt liefert jede primitive Form $g(z,b)$ der Klasse $\mathfrak{K}^*_{m,k}\left(\frac{x}{d}\right)$ durch

$$f(z,a) = \pm d\, g(z,b)$$

zwei Formen der Klasse $\mathfrak{K}_{m,k}(x)$ vom Inhalte $d(f)=d$, d.h. aus der Teilklasse $\mathfrak{K}^d_{m,k}(x)$. Daher enthält die Teilklasse $\mathfrak{K}^d_{m,k}(x)$ genau $2K^*_{m,k}\left(\frac{x}{d}\right)$ verschiedene Formen, weshalb nach (25) die Gleichung

$$K_{m,k}(x) = 2 \sum_{1 \leqq d \leqq x} K^*_{m,k}\left(\tfrac{x}{d}\right) \tag{26.1}$$

besteht. Mit der Möbiusschen Funktion $\mu(d)$ findet man hieraus nach einer bekannten Umkehrungsformel die Darstellung

$$2K^*_{m,k}(x) = \sum_{1 \leqq d \leqq x} \mu(d)\, K_{m,k}\left(\frac{x}{d}\right). \tag{26.2}$$

Somit führen die Gln. (23) auf

$$\begin{aligned} 2K^*_{2,1}(x) &= \sum_{1 \leqq d \leqq x} \mu(d)\, K_{2,1}\left(\tfrac{x}{d}\right) \\ &= \sum_{1 \leqq d \leqq x} \mu(d)\, A_3\left(\tfrac{x}{d}\right) \\ &= \sum_{1 \leqq d \leqq x} \mu(d) \left\{\alpha_3 \left(\tfrac{x}{d}\right)^3 + O\left(\left(\tfrac{x}{d}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right\} \\ &= \alpha_3 x^3 \sum_{1 \leqq d \leqq x} \frac{\mu(d)}{d^3} + O\left(x^{\frac{3}{2}} \sum_{1 \leqq d \leqq x} d^{-\frac{3}{2}}\right). \end{aligned}$$

$$2K^*_{3,1}(x) = \sum_{1\le d\le x} \mu(d)\, K_{3,1}\left(\frac{x}{d}\right)$$
$$= \sum_{1\le d\le x} \mu(d)\, A_4\left(\frac{x}{d}\right)$$
$$= \sum_{1\le d\le x} \mu(d)\left\{\alpha_4\left(\frac{x}{d}\right)^4 + O\left(\left(\frac{x}{d}\right)^2 \log\frac{x}{d}\right)\right\}$$
$$= \alpha_4 x^4 \sum_{1\le d\le x} \frac{\mu(d)}{d^4} + O\left(x^2 \log x \sum_{1\le d\le x} d^{-2}\right)$$

und in allen anderen Fällen

$$2K^*_{m,k}(x) = \sum_{1\le d\le x} \mu(d)\, K_{m,k}\left(\frac{x}{d}\right)$$
$$= \sum_{1\le d\le x} \mu(d)\, A_n\left(\frac{x}{d}\right) \qquad \text{mit} \quad n = \binom{m+k}{m}$$
$$= \sum_{1\le d\le x} \mu(d)\left\{\alpha_n\left(\frac{x}{d}\right)^n + O\left(\left(\frac{x}{d}\right)^{n-2}\right)\right\}$$
$$= \alpha_n x^n \sum_{1\le d\le x} \frac{\mu(d)}{d^n} + O\left(x^{n-2} \sum_{1\le d\le x} d^{-n+2}\right).$$

Nun ist bekanntlich mit der RIEMANNschen Zetafunktion $\zeta(s)$ für $s > 1$:

$$\sum_{1\le d\le x} \frac{\mu(d)}{d^s} = \frac{1}{\zeta(s)} - \sum_{d>x} \frac{\mu(d)}{d^s}$$

und

$$\sum_{d>x} \frac{\mu(d)}{d^s} \le \sum_{d>x} \frac{1}{d^s} = O\left(\int_x^\infty \frac{dt}{t^s}\right) = O\left(x^{1-s}\right),$$

ferner für $s > 1$

$$\sum_{1\le d\le x} \frac{1}{d^s} = O(1).$$

Damit erhalten wir

$$2K^*_{2,1}(x) = \alpha_3 x^3\left(\frac{1}{\zeta(3)} + O\left(x^{-2}\right)\right) + O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \frac{\alpha_3}{\zeta(3)} x^3 + O\left(x^{\frac{3}{2}}\right),$$
$$2K^*_{3,1}(x) = \alpha_4 x^4\left(\frac{1}{\zeta(4)} + O\left(x^{-3}\right)\right) + O\left(x^2 \log x\right)$$
$$= \frac{\alpha_4}{\zeta(4)} x^4 + O\left(x^2 \log x\right)$$

und in allen anderen Fällen

$$2K^*_{m,k}(x) = \alpha_n x^n\left(\frac{1}{\zeta(n)} + O\left(x^{1-n}\right)\right) + O\left(x^{n-2}\right)$$
$$= \frac{\alpha_n}{\zeta(n)} x^n + O\left(x^{n-2}\right) \qquad \text{mit} \quad n = \binom{m+k}{m}.$$

Damit sind die Gln. (11.1), (14.1), (15.1), (16.1) und (17.1) der Hauptsätze 1, 2 und 3 bewiesen.

Ist $m = r + s$ mit $r > 0$, $s > 0$ eine Zerlegung des Grades $m \geqq 2$ in natürliche Zahlen, so bezeichne $P_{r,s,k}(x)$ die Anzahl der (im Falle $r = s$ geordneten) Paare ganzer Formen $g(z, u)$, $h(z, v)$ der Grade r, s, deren Produkt $f(z, a) = g(z, u)\, h(z, v)$ eine Form der Klasse $\mathfrak{K}_{m,k}(x)$ ist, ebenso $P^*_{r,s,k}(x)$ die Anzahl der (im Falle $r = s$ geordneten) Paare primitiver Formen $g(z, u)$, $h(z, v)$ der Grade r, s, deren (primitives) Produkt $f(z, a) = g(z, u)\, h(z, v)$ der primitiven Klasse $\mathfrak{K}^*_{m,k}(x)$ angehört.

Es wird sich zeigen, daß es allein darauf ankommt, die Anzahlen $P_{r,s,k}(x)$ und $P^*_{r,s,k}(x)$ abzuschätzen, wobei übrigens im Falle $k \geqq 2$ bereits die triviale Ungleichung

$$P^*_{r,s,k}(x) \leqq P_{r,s,k}(x)$$

die Aufgabe auf die Bestimmung der Anzahl $P_{r,s,k}(x)$ zurückführt.

Hierzu beweisen wir zunächst

Satz 1. *Sind $g(z, u)$, $h(z, v)$ zwei beliebige Formen der Grade r, s mit reellen Koeffizienten, so gelten mit (allein von r, s abhängigen) positiven Konstanten c_0, c_1 Ungleichungen der Gestalt*

$$c_0 N(g) N(h) \leqq N(g h) \leqq c_1 N(g) N(h). \tag{27}$$

Die Koeffizienten des Produktes $f(z, a) = g(z, u)\, h(z, v)$ sind nämlich Bilinearformen in den (unbestimmten) Koeffizienten u, v der Faktoren $g(z, u)$ und $h(z, v)$. Daher ist $N(f) = N(g h)$ eine in u bzw. v homogene Funktion der Dimension 1, für die $N(f) = 0$ nur im Falle $N(g)\, N(h) = 0$ möglich ist. Infolgedessen besitzt $N(g h)$ als Funktion der Koeffizienten u, v unter der Nebenbedingung

$$N(g) = N(h) = 1$$

ein positives Minimum c_0 und ein (positives) Maximum c_1. Dann gelten wegen der Homogenität aber auch die Ungleichungen (27).

Satz 2. *In den Fällen*

$$1 \leqq r \leqq s \leqq m - 1; \qquad 2 \leqq m = r + s; \quad k \geqq 2$$

und

$$2 \leqq r \leqq s \leqq m - 2; \qquad 5 \leqq m = r + s; \quad k = 1$$

gilt

$$\left.\begin{aligned} P_{r,s,k}(x) &= O(x^{n-2}) \qquad (28.1)\\ P^*_{r,s,k}(x) &= O(x^{n-2}) \qquad (28.2) \end{aligned}\right\} \quad \text{mit} \quad n = \binom{m+k}{m}.$$

Offensichtlich folgt (28.2) unmittelbar aus (28.1), so daß wir uns nur mit der ersten Abschätzung zu beschäftigen haben. Nach Definition zählt $P_{r,s,k}(x)$ die Paare $g(z, u)$, $h(z, v)$, die die Normbedingung

$$0 < N(g h) \leqq x$$

der Klasse $\mathfrak{R}_{m,k}(x)$ erfüllen. Jedes dieser Paare erfüllt nach (27) auch die Bedingung

$$0 < N(g)\,N(h) \leq \frac{1}{c_0}\,N(g\,h) \leq \frac{x}{c_0}.$$

Bezeichnet daher $Q_{r,s,k}(y)$ die Anzahl der Paare $g(z,u)$, $h(z,v)$, die die Bedingung

(29) $$0 < N(g)\,N(h) \leq y$$

erfüllen, so ist gewiß

$$P_{r,s,k}(x) \leq Q_{r,s,k}\left(\frac{x}{c_0}\right).$$

Mithin genügt es zum Beweise des Satzes 2, die Beziehung

$$Q_{r,s,k}(y) = O(y^{n-2}) \quad \text{mit} \quad n = \binom{m+k}{m}$$

in den dort angegebenen Fällen nachzuweisen.

Nun läßt sich (29) in die beiden Bedingungen

$$0 < N(g) \leq y \quad \text{und} \quad 0 < N(h) \leq \frac{y}{N(g)}$$

zerlegen. Daher ist (in leichtverständlicher Schreibweise)

$$Q_{r,s,k}(y) = \sum_{0 < N(g) \leq y} K_{s,k}\left(\frac{y}{N(g)}\right)$$

und folglich nach (23):

$$Q_{r,s,k}(y) = O\left(\sum_{0 < N(g) \leq y} \left(\frac{y}{N(g)}\right)^{n_2}\right),$$

wenn noch abkürzend

$$n_1 = \binom{r+k}{r}; \qquad n_2 = \binom{s+k}{s}$$

gesetzt wird.

Bezeichnen wir einfachheitshalber die Koeffizienten (u) der Form $g(z,u)$ in lexikographischer Anordnung mit $u_1, u_2, \ldots, u_{n_1}$, so ist nach bekannter Methode

$$\sum_{0 < N(g) \leq y} \left(\frac{y}{N(g)}\right)^{n_2} = y^{n_2} \sum_{0 < u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_{n_1}^2 \leq y^2} (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_{n_1}^2)^{-\frac{n_2}{2}}$$

$$= O\left(y^{n_2} \int_1^y t^{n_1 - n_2 - 1}\,dt\right).$$

Hieraus folgt wegen $r \leq s$, also $n_1 \leq n_2$

$$Q_{r,s,k}(y) = \begin{cases} O(y^{n_2}) & \text{für} \quad r < s \quad \text{oder} \quad n_1 < n_2, \\ O(y^{n_2} \log y) & \text{für} \quad r = s \quad \text{oder} \quad n_1 = n_2. \end{cases}$$

Im Falle $k \geq 2$ ist für $1 \leq r \leq s \leq m - 1$ nach einer früheren Bemerkung

$$n_2 = \binom{s+k}{s} \leq \binom{m+k}{m} - 3 = n - 3$$

und deshalb

$$Q_{r,s,k}(y) = O(y^{n_2} \log y) = O(y^{n_2+1}) = O(y^{n-2}).$$

Im Falle $k=1$ ist wegen

$$n_2 = \binom{s+1}{s} = s+1; \qquad n = \binom{m+1}{m} = m+1$$

für $2 \leqq r < s \leqq m-2$ und $m \geqq 5$

$$Q_{r,s,1}(y) = O(y^{s+1}) = O(y^{m-1}) = O(y^{n-2}).$$

Der noch verbleibende Fall $2 \leqq r = s = \frac{m}{2}$, der nur für ein gerades m eintreten kann, liefert wegen $n_2 = \frac{m}{2}+1$; $n = m+1$

$$Q_{r,s,1}(y) = O\left(y^{\frac{m}{2}+1} \log y\right) = O\left(y^{\frac{m}{2}+2}\right) = O(y^{m-1}) = O(y^{n-2}),$$

sobald

$$\frac{m}{2} + 2 \leqq m-1 \quad \text{oder} \quad m \geqq 6$$

ist.

Satz 3. *Im Falle $k \geqq 2$; $m \geqq 2$ ist*

$$R^*_{m,k}(x) = O(x^{n-2}) \qquad \textit{mit} \quad n = \binom{m+k}{m}. \tag{30}$$

Jede reduzible Form $f(z,a)$ der primitiven Klasse $\mathfrak{R}^*_{m,k}(x)$ läßt sich als Produkt $f(z,a) = g(z,u)\,h(z,v)$ von primitiven Formen $g(z,u)$, $h(z,v)$ der Grade r, s mit $1 \leqq r \leqq s \leqq m-1$; $r+s=m$ darstellen. Folglich ist nach Satz 2

$$0 \leqq R^*_{m,k}(x) \leqq \sum_{1 \leqq r \leqq \frac{m}{2}} P^*_{r,m-r,k}(x) = O(x^{n-2}) \qquad \text{mit} \quad n = \binom{m+k}{m}.$$

Damit ist (11.3) und der Hauptsatz 1 vollständig bewiesen.

II.

Satz 4. *Im Falle $k=1$; $m \geqq 5$ ist*

$$R^*_{m,1}(x) = P^*_{1,m-1,1}(x) + O(x^{m-1}). \tag{31}$$

Die Anzahl derjenigen reduziblen Formen $f(z,a)$ der primitiven Klasse $\mathfrak{R}^*_{m,1}(x)$, die keinen linearen Faktor besitzen, ist nach Satz 2 für $m \geqq 5$ nur ein $O(x^{m-1})$; ebenso ist die Anzahl der reduziblen Formen $f(z,a)$ aus $\mathfrak{R}^*_{m,1}(x)$, die mehr als einen linearen Faktor besitzen, also in $P^*_{1,m-1,1}(x)$ mehrfach gezählt werden, nur ein $O(x^{m-1})$, da die Linearfaktoren zu Faktoren höheren Grades zusammengefaßt werden können. Die reduziblen Formen $f(z,a)$ aus $\mathfrak{R}^*_{m,1}(x)$ schließlich, die genau einen linearen Faktor besitzen, werden in $P^*_{1,m-1,1}(x)$ auch genau einmal gezählt. Mithin ist in der Tat

$$R^*_{m,1}(x) = P^*_{1,m-1,1}(x) + O(x^{m-1}),$$

so daß wir zum Beweise des Hauptsatzes 2 nur noch die Anzahl $P^*_{1,m-1,1}(x)$ zu bestimmen haben.

Eine Form $f(z, a)$ der Klasse $\mathfrak{R}_{m,1}(x)$ kann in der etwas vereinfachten Gestalt

$$f(z, a) = a_0 z_0^m + a_1 z_0^{m-1} z_1 + \cdots + a_m z_1^m$$

geschrieben werden, wodurch sich die Normbedingung zu

$$0 < a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2 \leq x^2$$

abändert. Um zunächst die Anzahl $P_{1,m-1,1}(x)$ der Produkte

$$f(z, a) = (u_0 z_0 + u_1 z_1)(v_0 z_0^{m-1} + v_1 z_0^{m-2} z_1 + \cdots + v_{m-1} z_1^{m-1})$$

aus $\mathfrak{R}_{m,1}(x)$ zu bestimmen, haben wir also die Gitterpunkte

$$(u, v) = (u_0, u_1, v_0, v_1, \ldots, v_{m-1})$$

des $(m+2)$-dimensionalen kartesischen Raumes abzuzählen, für die

$$0 < a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2 \leq x^2$$

oder

$$(32) \quad \begin{cases} 0 < \varphi(u, v) = (u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_{m-1}^2) + \\ \qquad + 2u_0 u_1 (v_0 v_1 + v_1 v_2 + \cdots + v_{m-2} v_{m-1}) \leq x^2 \end{cases}$$

gilt. Für jedes feste Wertepaar u_0, u_1 mit $u_0^2 + u_1^2 > 0$ stellt die Gleichung

$$\varphi(u, v) = x^2$$

ein Ellipsoid $\mathfrak{E}_m(u)$ des m-dimensionalen kartesischen Raumes dar. Ist daher $E_m(u)$ die Anzahl der Gitterpunkte $(v) = (v_0, v_1, \ldots, v_{m-1})$ im Bereiche

$$0 < \varphi(u, v) \leq x^2$$

bei festen Werten (u), so wird

$$(33) \qquad P_{1,m-1,1}(x) = \sum_{(u)}{}' E_m(u),$$

wenn (u) alle Gitterpunkte der Ebene mit Ausschluß des Nullpunktes durchläuft.

Nun besteht aber nach Satz 1 für beliebige reelle Werte (u, v) eine Ungleichung der Gestalt

$$(34) \quad \begin{cases} c_0^2 (u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_{m-1}^2) \leq \varphi(u, v) \\ \qquad \leq c_1^2 (u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2 + \cdots + v_{m-1}^2) \end{cases}$$

mit positiven Konstanten c_0, c_1. Daher kann die Beschränkung

$$0 < u_0^2 + u_1^2 \leq (c_2 x)^2 \quad \text{mit} \quad c_2 = c_0^{-1}$$

vorgenommen werden. Zugleich zeigt diese Ungleichung, daß die (etwa der Größe nach geordneten) Eigenwerte $\omega_0 \leq \omega_1 \leq \cdots \leq \omega_{m-1}$ der quadratischen Form $\varphi(u, v)$ in (v) bei festen Werten (u) der Beschränkung

$$c_0^2 (u_0^2 + u_1^2) \leq \omega_0 \leq \omega_1 \leq \cdots \leq \omega_{m-1} \leq c_1^2 (u_0^2 + u_1^2)$$

unterliegen, so daß für die Halbachsen des Ellipsoids $\mathfrak{E}_m(u)$ die Ungleichung

$$b_\mu = \frac{x}{\sqrt{\omega_\mu}} \leq \frac{c_2 x}{\sqrt{u_0^2 + u_1^2}} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

besteht. Setzen wir also D_m für die Determinante

$$D_m = \omega_0 \omega_1 \ldots \omega_{m-1}$$

der quadratischen Form $\varphi(u, v)$ in (v), so ist nach einem früheren Ergebnis[3])

$$E_m(u) - \frac{\alpha_m x^m}{\sqrt{D_m}} < c_3 \left(1 - \frac{c_2 x}{\sqrt{u_0^2 + u_1^2}}\right)^{m-1} < c_4 x^{m-1} (u_0^2 + u_1^2)^{-\frac{m-1}{2}}$$

und folglich

$$P_{1, m-1, 1}(x) = \alpha_m x^m \sum_{0 < u_0^2 + u_1^2 \leq (c_2 x)^2} D_m^{-\frac{1}{2}} - O\left(x^{m-1} \sum_{0 < u_0^2 + u_1^2 \leq (c_2 x)^2} (u_0^2 + u_1^2)^{-\frac{m-1}{2}}\right).$$

Daraus erhält man, für $m \geq 4$ wegen

$$\sum_{u_0^2 + u_1^2 \leq (c_2 x)^2} (u_0^2 - u_1^2)^{-\frac{m-1}{2}} < \sum_{(u)}{}' (u_0^2 - u_1^2)^{\frac{1-m}{2}} = O\left(\int_1^\infty t^{2-m}\, dt\right) = O(1),$$

für $m = 3$ wegen

$$\sum_{u_0^2 + u_1^2 \leq (c_2 x)^2} (u_0^2 + u_1^2)^{-1} = O\left(\int_1^{c_2 x} t^{-1}\, dt\right) = O(\log x)$$

die Gleichungen

$$P_{1, m-1, 1}(x) = \alpha_m x^m \sum_{u_0^2 + u_1^2 \leq (c_2 x)^2} D_m^{-\frac{1}{2}} + O(x^{m-1}) \qquad \text{für} \quad m \geq 4, \tag{35.1}$$

$$P_{1, 2, 1}(x) = \alpha_3 x^3 \sum_{u_0^2 + u_1^2 \leq (c_2 x)^2} D_3^{-\frac{1}{2}} + O(x^2 \log x) \qquad \text{für} \quad m = 3. \tag{35.2}$$

Für die noch zu bestimmende m-reihige Determinante

$$D_m = \begin{vmatrix} u_0^2 + u_1^2 & u_0 u_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ u_0 u_1 & u_0^2 + u_1^2 & u_0 u_1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & u_0 u_1 & u_0^2 + u_1^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & u_0^2 + u_1^2 & u_0 u_1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & u_0 u_1 & u_0^2 + u_1^2 \end{vmatrix}$$

finden wir leicht die Rekursionsformel

$$D_m = (u_0^2 + u_1^2) D_{m-1} - u_0^2 u_1^2 D_{m-2}$$

und die Anfangswerte

$$D_0 = 1; \qquad D_1 = u_0^2 + u_1^2; \qquad D_2 = u_0^4 + u_0^2 u_1^2 + u_1^4$$

[3]) Vgl. ZP II, Satz 7.

und damit durch vollständige Induktion

$$D_m = u_0^{2m} + u_0^{2m-2} u_1^2 + \cdots + u_0^2 u_1^{2m-2} + u_1^{2m}. \tag{36.1}$$

Nun ist für $m \geqq 3$ die Doppelreihe

$$\eta(m) = \sum_{(u)}{}' D_m^{-\frac{1}{2}} \tag{36.2}$$

über die Gitterpunkte $(u) = (u_0, u_1)$ der Ebene mit Ausschluß des Nullpunktes konvergent und demnach

$$\sum_{0<u_0^2+u_1^2 \leq (c_2 x)^2} D_m^{-\frac{1}{2}} = \eta(m) \sum_{u_0^2+u_1^2 > (c_2 x)^2} D_m^{-\frac{1}{2}}$$

oder

$$\sum_{0<u_0^2+u_1^2 \leq (c_2 x)^2} D_m^{-\frac{1}{2}} = \eta(m) + O(x^{2-m}) \tag{36.3}$$

wegen

$$\sum_{u_0^2+u_1^2 > (c_2 x)^2} D_m^{-\frac{1}{2}} \leq c_0^{-m} \sum_{u_0^2+u_1^2 > (c_2 x)^2} (u_0^2 + u_1^2)^{-\frac{m}{2}}$$

$$= O\left(\int_{c_2 x}^{\infty} t^{1-m}\, dt \right) = O(x^{2-m}).$$

Hieraus entnehmen wir

Satz 5. *Im Falle $k=1$; $m \geqq 3$ ist*

$$P_{1,m-1,1}(x) = \alpha_m \eta(m)\, x^m + O(x^{m-1}) \quad \textit{für} \quad m \geqq 4, \tag{37.1}$$

$$P_{1,2,1}(x) = \alpha_3 \eta(3)\, x^3 + O(x^2 \log x) \quad \textit{für} \quad m = 3, \tag{37.2}$$

und

$$P^*_{1,m-1,1}(x) = \frac{\alpha_m \eta(m)}{4\zeta^2(m)}\, x^m + O(x^{m-1}) \quad \textit{für} \quad m \geqq 4, \tag{38.1}$$

$$P^*_{1,2,1}(x) = \frac{\alpha_3 \eta(3)}{4\zeta^2(3)}\, x^3 + O(x^2 \log x) \quad \textit{für} \quad m = 3. \tag{38.2}$$

Auf Grund der Gln. (35) und (36.3) ist nämlich für $m \geqq 4$

$$P_{1,m-1,1}(x) = \alpha_m x^m \sum_{0<u_0^2+u_1^2 \leq (c_2 x)^2} D_m^{-\frac{1}{2}} + O(x^{m-1})$$

$$= \alpha_m \eta(m)\, x^m + O(x^2) + O(x^{m-1})$$

$$= \alpha_m \eta(m)\, x^m + O(x^{m-1}),$$

für $m=3$

$$P_{1,2,1}(x) = \alpha_3 x^3 \sum_{0<u_0^2+u_1^2 \leq (c_2 x)^2} D_3^{-\frac{1}{2}} + O(x^2 \log x)$$

$$= \alpha_3 \eta(3)\, x^3 + O(x^2) + O(x^2 \log x)$$

$$= \alpha_3 \eta(3)\, x^3 + O(x^2 \log x).$$

Der Übergang zur Anzahl $P^*_{1,m-1,1}(x)$ läßt sich in folgender Weise erreichen: Jedes in $P_{1,m-1,1}(x)$ gezählte Formenpaar

$$g(z,u) = u_0 z_0 - u_1 z_1; \qquad h(z,v) = v_0 z_0^{m-1} + v_1 z_0^{m-2} z_1 + \cdots + v_{m-1} z_1^{m-1}$$

kann mit den größten gemeinschaftlichen Teilern

$$d_1 = (u_0, u_1); \qquad d_2 = (v_0, v_1, \ldots, v_{m-1})$$

in der Gestalt

$$g(z,u) = \pm d_1 g^*(z,u'); \qquad h(z,v) = \pm d_2 h^*(z,v')$$

mit gleichgradigen primitiven Formen $g^*(z,u')$, $h^*(z,v')$ geschrieben werden. Da nach Voraussetzung das Produkt $f(z,a) = g(z,u)\,h(z,v)$ aus der Klasse $\mathfrak{R}_{m,1}(x)$ stammt, gehört das Produkt $f^*(z,a) = g^*(z,u')\,h^*(z,v')$ der Klasse $\mathfrak{R}^*_{m,1}\left(\frac{x}{d_1 d_2}\right)$ an, weshalb das Paar $g^*(z,u')$, $h^*(z,v')$ in $P^*_{1,m-1,1}\left(\frac{x}{d_1 d_2}\right)$ zu zählen ist. Umgekehrt aber liefert jedes Paar primitiver Formen $g^*(z,u')$, $h^*(z,v')$, das in $P^*_{1,m-1,1}(x\,d)$ mit einer ganzen Zahl d aus dem Intervall $1 \leqq d \leqq x$ gezählt wird, für jede Zerlegung $d = d_1 d_2$ genau vier verschiedene Paare

$$g(z,u) = \pm d_1 g^*(z,u'); \qquad h(z,v) = \pm d_2 h^*(z,v')$$

von Formen, die in $P_{1,m-1,1}(x)$ zu zählen sind. Mithin gilt

$$P_{1,m-1,1}(x) = 4 \sum_{1 \leq d_1 d_2 \leq x} P^*_{1,m-1,1}\left(\frac{x}{d_1 d_2}\right), \tag{39}$$

wobei die Summe über alle Paare natürlicher Zahlen d_1, d_2 mit $1 \leqq d_1 d_2 \leqq x$ zu erstrecken ist.

Setzen wir zur Abkürzung vorübergehend

$$\sum_{1 \leq d \leq y} P^*_{1,m-1,1}\left(\frac{y}{d}\right) = F(y),$$

so ist nach der Umkehrungsformel

$$P^*_{1,m-1,1}(y) = \sum_{1 \leq d \leq y} \mu(d)\, F\left(\frac{y}{d}\right).$$

Damit erhalten wir aus (39) zunächst

$$\frac{1}{4} P_{1,m-1,1}(x) = \sum_{1 \leq d_1 \leq x} \sum_{1 \leq d_2 \leq \frac{x}{d_1}} P^*_{1,m-1,1}\left(\frac{x}{d_1 d_2}\right)$$

$$= \sum_{1 \leq d_1 \leq x} F\left(\frac{x}{d_1}\right),$$

also wiederum nach der Umkehrungsformel

$$F(x) = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq d_1 \leq x} \mu(d_1)\, P_{1,m-1,1}\left(\frac{x}{d_1}\right).$$

Daraus folgt

$$P^*_{1,m-1,1}(x) = \sum_{1\le d_2\le x} \mu(d_2)\, F\left(\frac{x}{d_2}\right)$$
$$= \frac{1}{4} \sum_{1\le d_2\le x} \mu(d_2) \sum_{1\le d_1\le \frac{x}{d_2}} \mu(d_1)\, P_{1,m-1,1}\left(\frac{x}{d_1 d_2}\right),$$

also

$$P^*_{1,m-1,1}(x) = \frac{1}{4} \sum_{1\le d_1 d_2\le x} \mu(d_1)\,\mu(d_2)\, P_{1,m-1,1}\left(\frac{x}{d_1 d_2}\right). \tag{40}$$

Nun entnimmt man den Gln. (37) zunächst für $m \ge 4$:

$$P^*_{1,m-1,1}(x) = \frac{1}{4} \sum_{1\le d_1 d_2\le x} \mu(d_1)\,\mu(d_2) \left\{\alpha_m \eta(m) \frac{x^m}{d_1^m d_2^m} + O\left(\frac{x^{m-1}}{d_1^{m-1} d_2^{m-1}}\right)\right\}$$
$$= \frac{\alpha_m \eta(m)}{4} x^m \sum_{1\le d_1 d_2\le x} \frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)}{d_1^m d_2^m} + O\left(x^{m-1} \sum_{1\le d_1 d_2\le x} \frac{1}{d_1^{m-1} d_2^{m-1}}\right)$$
$$= \frac{\alpha_m \eta(m)}{4\zeta^2(m)} x^m + O(x^{m-1}).$$

Denn es ist

$$0 < \sum_{1\le d_1 d_2\le x} \frac{1}{d_1^{m-1} d_2^{m-1}} < \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1^{m-1}} \sum_{d_2=1}^{\infty} \frac{1}{d_2^{m-1}} = O(1)$$

und

$$\sum_{1\le d_1 d_2\le x} \frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)}{d_1^m d_2^m} = \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{\mu(d_1)}{d_1^m} \sum_{d_2=1}^{\infty} \frac{\mu(d_2)}{d_2^m} - \sum_{d_1 d_2>x} \frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)}{d_1^m d_2^m} = \frac{1}{\zeta^2(m)} + R(x)$$

mit einem Rest

$$|R(x)| = \left|\sum_{d_1 d_2>x} \frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)}{d_1^m d_2^m}\right| < \sum_{d_1 d_2>x} \frac{1}{(d_1 d_2)^m}$$
$$= \sum_{n>x} \frac{\tau(n)}{n^m} \le \sum_{n>x} n^{1-m} = O(x^{2-m}),$$

wenn $\tau(n)$ die Teileranzahl

$$\tau(n) = \sum_{d\mid n} 1 \le n$$

bezeichnet.

In gleicher Weise findet man für $m = 3$:

$$P^*_{1,2,1}(x) = \frac{1}{4} \sum_{1\le d_1 d_2\le x} \mu(d_1)\,\mu(d_2) \left\{\alpha_3 \eta(3) \frac{x^3}{d_1^3 d_2^3} + O\left(\frac{x^2}{d_1^2 d_2^2} \log \frac{x}{d_1 d_2}\right)\right\}$$
$$= \frac{\alpha_3 \eta(3)}{4} x^3 \sum_{1\le d_1 d_2\le x} \frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)}{d_1^3 d_2^3} + O\left(x^2 \sum_{1\le d_1 d_2\le x} \frac{1}{d_1^2 d_2^2} \log \frac{x}{d_1 d_2}\right)$$
$$= \frac{\alpha_3 \eta(3)}{4\zeta^2(3)} x^3 + O(x^2 \log x).$$

Die Gl. (38.1) liefert nun für $m \geqq 5$ in Verbindung mit Satz 4 die Abschätzung

$$R^*_{m,1}(x) = P^*_{1,m-1,1}(x) + O(x^{m-1})$$
$$= \frac{\alpha_m \eta(m)}{4\zeta^2(m)} x^m + O(x^{m-1}),$$

also die Gl. (14.2) und damit den Beweis des Hauptsatzes 2.

III.

In den nun allein noch zu behandelnden Fällen $k = 1$; $2 \leqq m \leqq 4$ setze ich zur Vereinfachung $P_{r,s,1}(x) = P_{r,s}(x)$; $P^*_{r,s,1}(x) = P^*_{r,s}(x)$ und führe für $m = 3$ noch die Anzahlen $Q_3(x)$, $Q^*_3(x)$ ein:

Mit $Q_3(x)$ bezeichne ich die Anzahl der geordneten Tripel von Linearformen

$$g_1(z) = u_0 z_0 + u_1 z_1; \qquad g_2(z) = v_0 z_0 + v_1 z_1; \qquad g_3(z) = w_0 z_0 + w_1 z_1,$$

deren Produkt

$$f(z, a) = g_1(z)\, g_2(z)\, g_3(z)$$

der Klasse $\mathfrak{R}_{3,1}(x)$ angehört, analog mit $Q^*_3(x)$ die Anzahl der geordneten Tripel primitiver Linearformen, deren Produkt $f(z, a)$ der primitiven Klasse $\mathfrak{R}^*_{3,1}(x)$ angehört. Dann gilt:

Satz 6. *Für die Anzahlen $R^*_{m,1}(x)$ mit $2 \leqq m \leqq 4$ bestehen die Gleichungen*

(41.1) $$R^*_{2,1}(x) = \tfrac{1}{2} P^*_{1,1}(x) + O(x),$$

(41.2) $$R^*_{3,1}(x) = P^*_{1,2}(x) - \tfrac{1}{3} Q^*_3(x) + O(x^2),$$

(41.3) $$R^*_{4,1}(x) = P^*_{1,3}(x) + \tfrac{1}{2} P^*_{2,2}(x) + O(x^3).$$

Als Vorbereitung schätzen wir zunächst für $2 \leqq m \leqq 4$ die Anzahl $D^*_m(x)$ der primitiven Formen $f(z, a)$ aus $\mathfrak{R}^*_{m,1}(x)$ ab, deren Diskriminante verschwindet:

(42) $$D^*_m(x) = O(x^{m-1}) \qquad \text{für} \quad 2 \leqq m \leqq 4.$$

Im Falle $m = 2$ hat eine solche Form $f(z, a)$ notwendig die Gestalt

$$f(z, a) = (u_0 z_0 + u_1 z_1)^2$$

mit einer primitiven Linearform $u_0 z_0 + u_1 z_1$, deren Koeffizienten der Normbedingung

$$0 < N^2(f) = u_0^4 + 4u_0^2 u_1^2 + u_1^4 \leqq x^2$$

unterliegen. Da dann aber auch

$$0 < u_0^2 + u_1^2 \leqq N(f) \leqq x$$

gilt, ist $D^*_2(x)$ gewiß nicht größer als die Anzahl der Gitterpunkte (u_0, u_1) der Ebene im Kreisbereich

$$0 < u_0^2 + u_1^2 \leqq x,$$

also

$$0 \leqq D^*_2(x) \leqq A_2(\sqrt{x}) = O(x).$$

Im Falle $m=3$ hat $f(z, a)$ bei verschwindender Diskriminante die Gestalt

$$f(z, a) = (u_0 z_0 + u_1 z_1)^2 (v_0 z_0 + v_1 z_1) = g^2(z)\, h(z)$$

in primitiven Linearformen $g(z)$, $h(z)$. Die Normbedingung

$$0 < N(f) \leqq x$$

führt wie im Satze 1 auf eine Ungleichung der Gestalt

$$0 < N^2(g)\, N(h) \leqq c_5 N(f) \leqq c_5 x,$$

so daß gewiß

$$0 < (u_0^2 + u_1^2)^2 (v_0^2 + v_1^2) \leqq (c_5 x)^2 \tag{43}$$

erfüllt ist. Mithin ist $D_3^*(x)$ nicht größer als die Anzahl der Gitterpunkte (u_0, u_1, v_0, v_1) des vierdimensionalen Raumes, die dem durch (43) beschriebenen Bereiche angehören. Zerlegt man (43) in die Bedingungen

$$0 < u_0^2 + u_1^2 \leqq c_5 x; \qquad 0 < v_0^2 + v_1^2 \leqq \left(\frac{c_5 x}{u_0^2 + u_1^2}\right)^2,$$

so folgt

$$D_3^*(x) \leqq c_6 \sum_{0 < u_0^2 + u_1^2 \leqq c_5 x} \left(\frac{c_5 x}{u_0^2 + u_1^2}\right)^2 = c_7 x^2 \sum_{0 < u_1^2 + u_1^2 \leqq c_5 x} (u_0^2 + u_1^2)^{-2}$$

$$= O\left(x^2 \sum_{(u_0, u_1)}{}' (u_0^2 + u_1^2)^{-2}\right) = O(x^2).$$

Im letzten Falle $m=4$ hat $f(z, a)$ bei verschwindender Diskriminante eine der beiden Gestalten

$$f_1(z, a) = (u_0 z_0 + u_1 z_1)^2 (v_0 z_0^2 + v_1 z_0 z_1 + v_2 z_1^2)$$

$$f_2(z, a) = (w_0 z_0^2 + w_1 z_0 z_1 + w_2 z_1^2)^2.$$

Infolgedessen ist $D_4^*(x)$ gewiß nicht größer als die Summe der Anzahlen der Gitterpunkte $(u, v) = (u_0, u_1, v_0, v_1, v_2)$ bzw. $(w) = (w_0, w_1, w_2)$, die der Bedingung

$$0 < (u_0^2 + u_1^2)^2 (v_0^2 + v_1^2 + v_2^2) \leqq (c_8 x)^2$$

bzw.

$$0 < (w_0^2 + w_1^2 + w_2^2)^2 \leqq (c_9 x)^2$$

genügen. Folglich ist

$$0 \leqq D_4^*(x) \leqq c_{10} \sum_{0 < u_0^2 + u_1^2 \leqq c_8 x} \left(\frac{c_8 x}{u_0^2 + u_1^2}\right)^3 + c_{11} (c_9 x)^3$$

$$= O\left(x^3 \sum_{(u_0, u_1)}{}' (u_0^2 + u_1^2)^{-3}\right) + O(x^3) = O(x^3).$$

Hieraus ergeben sich nun sehr rasch die Gleichungen des Satzes 6. Jede reduzible (primitive) Form $f(z, a)$ aus $\mathfrak{R}_{2,1}^*(x)$ läßt sich als Produkt primitiver Linearformen

$$f(z, a) = (u_0 z_0 + u_1 z_1)(v_0 z_0 + v_1 z_1)$$

darstellen. Im Falle nichtverschwindender Diskriminante, also verschiedener (primitiver) Linearfaktoren wird $f(z, a)$ in der Anzahl $P_{1,1}^*(x)$ genau zweimal

gezählt. Die Anzahl der $f(z, a)$ mit verschwindender Diskriminante ist ein $O(x)$. Mithin gilt

$$R^*_{2,1}(x) = \tfrac{1}{2} P^*_{1,1}(x) + O(x).$$

Jede reduzible (primitive) Form $f(z, a)$ aus $\mathfrak{R}^*_{3,1}(x)$ läßt sich in einer der beiden Gestalten

$$f_1(z, a) = (u_0 z_0 + u_1 z_1)(v_0 z_0^2 + v_1 z_0 z_1 + v_2 z_1^2)$$

$$f_2(z, a) = (u_0 z_0 + u_1 z_1)(v_0 z_0 + v_1 z_1)(w_0 z_0 + w_1 z_1)$$

in irreduzible (primitive) Faktoren zerlegen. Dabei brauchen wir im zweiten Falle wegen $D^*_3(x) = O(x^2)$ nur diejenigen Formen $f(z, a)$ zu berücksichtigen, deren Linearfaktoren sämtlich verschieden sind. Nun zählt $P^*_{1,2}(x)$ die Formen $f_1(z, a)$ genau einmal, die Formen $f_2(z, a)$ dagegen genau dreimal, während $Q^*_3(x)$ die Formen $f_2(z, a)$ genau sechsmal zählt. Mithin zählt

$$P^*_{1,2}(x) - \tfrac{1}{3} Q^*_3(x)$$

jede der Formen $f_1(z, a)$, $f_2(z, a)$ mit nichtverschwindender Diskriminante genau einmal. Folglich ist

$$R^*_{3,1}(x) = P^*_{1,2}(x) - \tfrac{1}{3} Q^*_3(x) + O(x^2)$$

in Übereinstimmung mit (41.2).

Für den letzten Fall $m = 4$ benötigen wir noch eine Abschätzung der Anzahl $D^{**}_4(x)$ derjenigen (primitiven) Formen $f(z, a)$ aus $\mathfrak{R}^*_{4,1}(x)$, die in mindestens drei irreduzible Faktoren zerfallen:

$$D^{**}_4(x) = O(x^3). \tag{44}$$

Jedenfalls ist eine solche Form darstellbar in der Gestalt

$$\begin{aligned} f(z, a) &= (u_0 z_0 + u_1 z_1)(v_0 z_0 + v_1 z_1)(w_0 z_0^2 + w_1 z_0 z_1 + w_2 z_1^2) \\ &= g_1(z)\, g_2(z)\, h(z) \end{aligned}$$

mit primitiven Formen $g_1(z)$, $g_2(z)$, $h(z)$, so daß aus der Normbedingung

$$0 < N(f) \leqq x$$

eine Ungleichung

$$0 < N(g_1)\, N(g_2)\, N(h) \leqq c_{12}\, x$$

oder

$$0 < (u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2)(w_0^2 + w_1^2 + w_2^2) \leqq (c_{12}\, x)^2$$

gefolgert werden kann. Zerlegt man diese Bedingung in

$$0 < (u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2) \leqq (c_{12}\, x)^2; \quad 0 < w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 \leqq \frac{(c_{12}\, x)^2}{(u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2)},$$

so folgt

$$\begin{aligned} 0 \leqq D^{**}_4(x) &\leqq c_{13}\, x^3 \sum_{0 < (u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2) \leqq (c_{12} x)^2} (u_0^2 + u_1^2)^{-\frac{3}{2}} (v_0^2 + v_1^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &< c_{13}\, x^3 \sum_{(u_0, u_1)}{}' (u_0^2 + u_1^2)^{-\frac{3}{2}} \sum_{(v_0, v_1)}{}' (v_0^2 + v_1^2)^{-\frac{3}{2}} = O(x^3). \end{aligned}$$

Bei der Abzählung der primitiven reduziblen Formen $f(z, a)$ aus $\mathfrak{R}^*_{4,1}(x)$ brauchen wir infolgedessen nur diejenigen Formen mit nichtverschwindender Diskriminante zu berücksichtigen, die in genau zwei irreduzible (primitive) Faktoren zerfallen, also eine der beiden Gestalten

$$f_1(z, a) = (u_0 z_0 + u_1 z_1)(v_0 z_0^3 + v_1 z_0^2 z_1 + v_2 z_0 z_1^2 + v_3 z_1^3)$$
$$f_2(z, a) = (u_0 z_0 + u_1 z_0 z_1 + u_2 z_1^2)(v_0 z_0^2 + v_1 z_0 z_1 + v_2 z_1^2)$$

haben. Offensichtlich zählt $P^*_{1,3}(x)$ die Formen $f_1(z, a)$ genau einmal, außer diesen aber nur Formen mit mehr als zwei irreduziblen Faktoren; ferner zählt $P^*_{2,2}(x)$ die Formen $f_2(z, a)$ genau zweimal, außer diesen nur Formen mit mehr als zwei irreduziblen Faktoren oder mit verschwindender Diskriminante. Folglich ist, wie der Satz 6 behauptet,

$$R^*_{4,1}(x) = P^*_{1,3}(x) + \tfrac{1}{2} P^*_{2,2}(x) + O(x^3).$$

Die Anzahlen $P^*_{1,2}(x)$ und $P^*_{1,3}(x)$ sind bereits aus Satz 5 bekannt; daher sind zur endgültigen Lösung unseres Problems allein noch die Anzahlen

$$P^*_{1,1}(x),\ P^*_{2,2}(x),\ Q^*_3(x),$$

zunächst also die Anzahlen

$$P_{1,1}(x),\ P_{2,2}(x),\ Q_3(x)$$

zu bestimmen.

IV.

Nach Definition zählt $P_{1,1}(x)$ die Anzahl der Formen

$$f(z, a) = (u_0 z_0 + u_1 z_1)(v_0 z_0 + v_1 z_1),$$

die die Normbedingung

$$0 < N^2(f) = (u_0 v_0)^2 + (u_0 v_1 + u_1 v_0)^2 + (u_1 v_1)^2 \leq x^2$$

erfüllen, also die Gitterpunkte $(u, v) = (u_0, u_1, v_0, v_1)$ des vierdimensionalen Raumes, die dem durch die Bedingung

$$0 < \Phi(u, v) = (u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2) + 2u_0 u_1 v_0 v_1 \leq x^2, \tag{45.1}$$

$$1 \leq u_0^2 + u_1^2, \qquad 1 \leq v^2 + v_1^2 \tag{45.2}$$

gekennzeichneten Bereich $\mathfrak{P}$ angehören.

Nun gilt bekanntlich bei beliebigen reellen Werten u_0, u_1, v_0, v_1 die Ungleichung

$$|u_0 u_1 v_0 v_1| \leq \tfrac{1}{4}(u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2)$$

und daher auch

$$\tfrac{1}{2}(u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2) \leq \Phi(u, v) \leq \tfrac{3}{2}(u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2). \tag{46}$$

Mithin besteht für alle Gitterpunkte (u, v) des Bereiches $\mathfrak{P}$ die Ungleichung

$$0 < (u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2) \leq 2\Phi(u, v) \leq 2x^2. \tag{47}$$

Erklärt man $\delta(u, v)$ für einen beliebigen Gitterpunkt (u, v) durch:

$$\delta(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (u, v) \text{ zu } \mathfrak{P} \text{ gehört,} \\ 0, & \text{wenn } (u, v) \text{ nicht zu } \mathfrak{P} \text{ gehört,} \end{cases}$$

so ist offensichtlich

$$\delta(u, v) = \delta(v, u)$$

und

$$P_{1,1}(x) = \sum_{(u, v)} \delta(u, v),$$

wenn die Summe über alle Gitterpunkte (u, v) des vierdimensionalen Raumes genommen wird. Wir setzen

$$2x^2 = y^4$$

und zerlegen unter der Abkürzung

$$|u| = (u_0^2 + u_1^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad |v| = (v_0^2 + v_1^2)^{\frac{1}{2}}$$

diese Summe in vier Teile:

$$P_{1,1}(x) = \sum_{|u| \leq y,\, |v| \leq y} \delta(u, v) + \sum_{|u| \leq y,\, |v| > y} \delta(u, v) + \sum_{|u| > y,\, |v| \leq y} \delta(u, v) + \sum_{|u| > y,\, |v| > y} \delta(u, v).$$

Da die letzte dieser Summen leer ist, weil nach (47) die Bedingungen

$$|u|^2 |v|^2 > y^4 = 2x^2 \quad \text{und} \quad 0 < 2\Phi(u, v) \leq 2x^2 = y^4$$

durch keinen Gitterpunkt (u, v) gleichzeitig erfüllt werden können, finden wir

$$P_{1,1}(x) = 2 \sum_{|u| \leq y} \sum_{(v)} \delta(u, v) - \sum_{|u| \leq y,\, |v| \leq y} \delta(u, v).$$

Es bleibt demnach die Aufgabe, die beiden Werte

$$S_1(x) = \sum_{|u| \leq y} \sum_{(v)} \delta(u, v), \tag{48.1}$$

$$S_2(x) = \sum_{|u| \leq y,\, |v| \leq y} \delta(u, v) \tag{48.2}$$

zu bestimmen, da aus diesen

$$P_{1,1}(x) = 2S_1(x) - S_2(x) \tag{48.3}$$

entnommen werden kann.

Bei festgehaltenen Werten u_0, u_1 mit $|u| > 0$ stellt

$$E(u) = \sum_{(v)} \delta(u, v)$$

die Anzahl der Gitterpunkte (v) der Ebene dar, die der durch

$$0 < \Phi(u, v) \leq x^2$$

dargestellten (im Nullpunkte gelochten) Ellipse angehören. Folglich ist

$$S_1(x) = \sum_{0 < |u| \leq y} E(u).$$

Für die Anzahl $E(u)+1$ der Gitterpunkte (v) im Bereich

$$0 \leqq \Phi(u,v) = (u_0^2+u_1^2)\,v_0^2 + 2u_0u_1v_0v_1 + (u_0^2+u_1^2)\,v_1^2 \leqq x^2$$

findet man nach einem früheren Ergebnis[4]) mit der Determinante

$$\Delta(u) = \begin{vmatrix} u_0^2+u_1^2 & u_0u_1 \\ u_0u_1 & u_0^2+u_1^2 \end{vmatrix} = u_0^4 + u_0^2u_1^2 + u_1^4$$

und den Eigenwerten

$$\omega_1 = u_0^2+u_1^2+|u_0u_1|; \qquad \omega_2 = u_0^2+u_1^2-|u_0u_1|$$

der quadratischen Form $\Phi(u,v)$ in (v) die Ungleichung

$$\left|E(u)+1-\frac{\pi x^2}{\sqrt{\Delta(u)}}\right| < c_{14}\left(\frac{x^2}{\sqrt{\Delta(u)}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^{\frac{3}{4}},$$

so daß wir wegen der für alle Gitterpunkte (u) mit $|u|>0$ gültigen Schranke

$$0 < \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{u_0^2+u_1^2+|u_0u_1|}{u_0^2+u_1^2-|u_0u_1|} \leqq 3$$

erhalten:

$$S_1(x) = \sum_{0<|u|\leq y} E(u)$$

$$= \sum_{0<|u|\leq y}\left(\frac{\pi x^2}{\sqrt{\Delta(u)}}-1\right) + O\left(x^{\frac{2}{3}}\sum_{0<|u|\leq y}\Delta^{-\frac{1}{6}}(u)\right).$$

Hierin ist

$$\Delta(u) = u_0^4+u_0^2u_1^2+u_1^4 \geqq \tfrac{3}{4}(u_0^2+u_1^2)^2,$$

also

$$\sum_{0<|u|\leq y}\Delta^{-\frac{1}{6}}(u) = O\left(\sum_{0<|u|\leq y}|u|^{-\frac{2}{3}}\right)$$

$$= O\left(\int_1^y t^{\frac{1}{3}}\,dt\right) = O(y^1) = O(x^{\frac{2}{3}}),$$

ferner

$$\sum_{0<|u|\leq y} 1 = O(y^2) = O(x)$$

und damit

$$S_1(x) = \pi x^2 \sum_{0<|u|\leq y}\Delta^{-\frac{1}{2}}(u) + O(x^{\frac{1}{3}}). \tag{49}$$

Satz 7. *Für die über alle Gitterpunkte (u,v) der Ebene mit $0<u^2+v^2\leq y^2$ erstreckte Summe*

$$T_1(y) = \sum_{0<u^2+v^2\leq y^2}(u^4+u^2v^2+v^4)^{-\frac{1}{2}}$$

gilt

$$T_1(y) = 4\beta_0\log y + \gamma_0 + O\left(\frac{1}{y}\right) \tag{50.1}$$

mit den Konstanten

$$\beta_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\varphi}} \tag{50.2}$$

und

$$\gamma_0 = \lim_{y\to\infty}\left(\sum_{u^2+v^2<y^2}(u^4+u^2v^2+v^4)^{-\frac{1}{2}} - 2\beta_0\log y\right). \tag{50.3}$$

[4]) Vgl. ZP III, Satz 6.

Zum Beweise setzen wir abkürzend

$$g(u,v) = (u^4 + u^2 v^2 + v^4)^{-\frac{1}{2}}$$

und zerlegen

$$T_1(y) = \sum_{0 < u^2 + v^2 \le y^2} g(u,v)$$

$$= \sum_{0 < u^2 \le y^2} \frac{1}{u^2} + \sum_{0 < v^2 \le y^2} \frac{1}{v^2} + 4 \sum_{\substack{0 < u^2 + v^2 \le 1 \cdot y^2 \\ u > 0,\ v > 0}} g(u,v)$$

$$= 4\zeta(2) \cdot O\left(\frac{1}{y}\right) - 4 T_1^*(y)$$

mit der Summe

$$T_1^*(y) = \sum_{\substack{0 < u^2 + v^2 < y^2 \\ u > 0,\ v > 0}} g(u,v). \tag{51}$$

Jedem Gitterpunkt (u, v) der Ebene mit $u > 0$, $v > 0$ ordnen wir nun das Quadrat

$$\mathfrak{W}(u,v): \quad u \le s \le u+1, \quad v \le t \le v+1$$

zu. Es ist dann für jeden Punkt (s, t) dieses Quadrats

$$g(u,v) \ge g(s,t) \ge g(u+1, v+1)$$

und daher

$$g(u,v) \ge \iint_{\mathfrak{W}(u,v)} g(s,t)\, ds\, dt \ge g(u+1, v+1)$$

oder

$$0 \le g(u,v) - \iint_{\mathfrak{W}(u,v)} g(s,t)\, ds\, dt \le g(u,v) - g(u+1, v+1).$$

Damit folgt

$$0 \le T_1^*(y) - \sum_{\substack{0 < u^2 + v^2 \le y^2 \\ u > 0,\ v > 0}} \iint_{\mathfrak{W}(u,v)} g(s,t)\, ds\, dt \le \sum_{\substack{0 < u^2 + v^2 \le y^2 \\ u > 0,\ v > 0}} \big(g(u,v) - g(u+1, v+1)\big).$$

Nun ist

$$\sum_{\substack{0 < u^2 + v^2 \le y^2 \\ u > 0,\ v > 0}} \big(g(u,v) - g(u+1, v+1)\big)$$

$$= \sum_{\substack{0 < u^2 + v^2 < y^2 \\ u > 0,\ v > 0}} g(u,v) - \sum_{\substack{0 < (u-1)^2 + (v-1)^2 < y^2 \\ u > 1,\ v > 1}} g(u,v)$$

$$= \sum_{\substack{0 < u^2 + v^2 \le y^2 \\ u > 0,\ v > 0}} g(u,v) - \sum_{\substack{0 \le (u-1)^2 + (v-1)^2 < y^2 \\ u > 0,\ v > 0}} g(u,v) +$$

$$- \sum_{\substack{(v-1)^2 < y^2 \\ v > 0}} g(1,v) - \sum_{\substack{(u-1)^2 < y^2 \\ u > 0}} g(u,1) - g(1,1)$$

$$= - \sum_{(u-1)^2 + (v-1)^2 \le y^2 < u^2 + v^2} g(u,v) + 2 \sum_{1 \le u \le y+1} \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + u^4}} - g(1,1)$$

$$= - \sum_{(u-1)^2 + (v-1)^2 < y^2 < u^2 + v^2} g(u,v) + c_{15} + O\left(\frac{1}{y}\right).$$

Die Summationsbedingung

$$(u-1)^2 + (v-1)^2 \le y^2 < u^2 + v^2$$

liefert nach der bekannten CAUCHYschen Ungleichung

$$\begin{aligned} u^2+v^2 &= (u-1)^2+(v-1)^2+2(u-1+v-1)+2 \\ &\leqq (u-1)^2+(v-1)^2+2\sqrt{2}\sqrt{(u-1)^2+(v-1)^2}+2 \\ &\leqq (y+\sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

Mithin ist

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \sum_{(u-1)^2+(v-1)^2\leq y^2<u^2+v^2} g(u,v) \leqq \sum_{y^2<u^2+v^2\leq(y+\sqrt{2})^2} g(u,v) \\ &= O\left(\iint_{y^2\leq s^2+t^2\leq(y+\sqrt{2})^2} (s^2+t^2)^{-1}\,ds\,dt\right) \\ &= O\left(\int_y^{y+\sqrt{2}} \frac{d\varrho}{\varrho}\right) = O\left(\log\frac{y+\sqrt{2}}{y}\right) = O\left(\frac{1}{y}\right). \end{aligned}$$

Damit haben wir erhalten

$$0 \leq T_1^*(y) - \sum_{\substack{0<u^2+v^2\leq y^2 \\ u>0,\ v>0}} \iint_{\mathfrak{W}(u,v)} g(s,t)\,ds\,dt \leq c_{15} + O\left(\frac{1}{y}\right),$$

weshalb der Grenzwert

$$\lim_{y\to\infty}\left(T_1^*(y) - \sum_{\substack{0<u^2+v^2\leq y^2 \\ u>0,\ v>0}} \iint_{\mathfrak{W}(u,v)} g(s,t)\,ds\,dt\right) = c_{16}$$

existiert, wobei nach dem eben Gezeigten genauer gilt:

$$T_1^*(y) = \sum_{\substack{0<u^2+v^2\leq y^2 \\ u>0,\ v>0}} \iint_{\mathfrak{W}(u,v)} g(s,t)\,ds\,dt + c_{16} + O\left(\frac{1}{y}\right). \tag{52}$$

Für die hierin auftretende Summe von Integralen gilt nun weiter

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{1\leq s^2+t^2\leq y^2 \\ 1\leq s,\ 1\leq t}} g(s,t)\,ds\,dt &\leqq \sum_{\substack{1\leq u^2+v^2\leq y^2 \\ 1\leq u,\ 1\leq v}} \iint_{\mathfrak{W}(u,v)} g(s,t)\,ds\,dt \\ &\leqq \iint_{\substack{1\leq s^2+t^2\leq (y+\sqrt{2})^2 \\ 1\leq s,\ 1\leq t}} g(s,t)\,ds\,dt, \end{aligned}$$

da für jeden Gitterpunkt (u, v) mit $u^2+v^2\leqq y^2$ gewiß der Gitterpunkt $(u+1, v+1)$ der Beschränkung

$$(u+1)^2+(v+1)^2 \leq (y+\sqrt{2})^2$$

unterliegt. Folglich ist

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \sum_{\substack{1\leq u^2+v^2\leq y^2 \\ 1\leq u,\ 1\leq v}} \iint_{\mathfrak{W}(u,v)} g(s,t)\,ds\,dt - \iint_{\substack{1\leq s^2+t^2\leq y^2 \\ 1\leq s,\ 1\leq t}} g(s,t)\,ds\,dt \\ &\leqq \iint_{\substack{y^2\leq s^2+t^2\leq (y+\sqrt{2})^2 \\ 1\leq s,\ 1\leq t}} g(s,t)\,ds\,dt \\ &\leqq \iint_{\substack{y^2\leq s^2+t^2\leq (y+\sqrt{2})^2 \\ 0<s,\ 0<t}} g(s,t)\,ds\,dt. \end{aligned}$$

Durch Übergang zu ebenen Polarkoordinaten

$$s = \varrho \cos\varphi, \qquad t = \varrho \sin\varphi$$

findet man

$$\iint\limits_{\substack{y_0^2 \le s^2+t^2 \le y_1^2 \\ s>0,\, t>0}} g(s,t)\, ds\, dt = \int\limits_{y_0}^{y_1} \int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{d\varphi \cdot \varrho\, d\varrho}{\varrho^2 \sqrt{\sin^4\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi + \cos^4\varphi}}$$

$$= \log\frac{y_1}{y_0} \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin 2\varphi}}$$

$$= \log\frac{y_1}{y_0} \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin\varphi}}$$

$$= \beta_0 \log\frac{y_1}{y_0}.$$

Damit erhalten wir

$$0 \le \sum_{\substack{1 \le u^2+v^2 \le y^2 \\ 1 \le u,\, 1 \le v}} \iint\limits_{\mathfrak{B}(u,v)} g(s,t)\, ds\, dt - \iint\limits_{\substack{1 \le s^2+t^2 \le y^2 \\ 1 \le s,\, 1 \le t}} g(s,t)\, ds\, dt$$

$$\le \beta_0 \log\frac{y+\sqrt{2}}{y} = O\left(\frac{1}{y}\right).$$

Der Übergang zum Integral

$$I_1(y) = \iint\limits_{\substack{1 \le s^2+t^2 \le y^2 \\ s>0,\, t>0}} g(s,t)\, ds\, dt = \beta_0 \log y \tag{53}$$

wird nun erreicht durch

$$I_1(y) = \iint\limits_{\substack{1 \le s^2+t^2 \le y^2 \\ s \ge 1,\, t \ge 1}} g(s,t)\, ds\, dt + \iint\limits_{\substack{1 \le s^2+t^2 \le y^2 \\ 0<s \le 1,\, t \ge 1}} g(s,t)\, ds\, dt +$$

$$+ \iint\limits_{\substack{1 \le s^2+t^2 \le y^2 \\ s \ge 1,\, 0<t \le 1}} g(s,t)\, ds\, dt + \iint\limits_{\substack{1 \le s^2+t^2 \le y^2 \\ 0<s \le 1,\, 0<t \le 1}} g(s,t)\, ds\, dt$$

$$= \iint\limits_{\substack{1 \le s^2+t^2 \le y^2 \\ s \ge 1,\, t \ge 1}} g(s,t)\, ds\, dt + c_{17} + O\left(\frac{1}{y}\right).$$

Mithin ist

$$T_1^*(y) - I_1(y) = c_{18} + O\left(\frac{1}{y}\right)$$

oder

$$T_1^*(y) = \beta_0 \log y + c_{18} + O\left(\frac{1}{y}\right)$$

und wegen (51) endlich

$$T_1(y) = 4\beta_0 \log y + \gamma_0 + O\left(\frac{1}{y}\right)$$

mit den im Satze 7 angegebenen Konstanten.

Nach (49) und (50.1) ergibt sich hieraus auch

$$S_1(x) = \pi x^2 T_1(y) + O(x^{\frac{4}{3}})$$

$$= \pi x^2 \left(4\beta_0 \log y + \gamma_0 + O\left(\frac{1}{y}\right)\right) + O(x^{\frac{4}{3}})$$

also

$$S_1(x) = 2\pi\beta_0 x^2 \log x + \pi(\beta_0 \log 2 + \gamma_0) x^2 + O(x^{\frac{3}{2}}). \tag{54}$$

Satz 8. *Für die Anzahl $T_2(y)$ der Gitterpunkte $(u, v) = (u_0, u_1, v_0, v_1)$ des vierdimensionalen Bereiches*

$$\mathfrak{B}(y): \quad 0 \leq 2\Phi(u, v) \leq y^4, \qquad 0 \leq u_0^2 + u_1^2 \leq y^2, \qquad 0 \leq v_0^2 + v_1^2 \leq y^2$$

gilt

$$T_2(y) = \gamma_1 y^4 + O(y^3) \tag{55.1}$$

mit der Konstanten

$$\gamma_1 = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \log(2 + \sin\varphi \sin\psi)}{2 + \sin\varphi \sin\psi} \, d\varphi \, d\psi. \tag{55.2}$$

Zum Beweise nennen wir $I_2(y)$ das vierfache Integral

$$I_2(y) = \int_{\mathfrak{B}(y)} du_0 \, du_1 \, dv_0 \, dv_1 \tag{56}$$

über den im Satze angegebenen Bereich $\mathfrak{B}(y)$ und umgeben jeden Gitterpunkt (u, v) des vierdimensionalen Raumes mit dem Würfel

$$\mathfrak{W}(u, v): \quad \begin{cases} u_0 - \frac{1}{2} \leq s_0 \leq u_0 + \frac{1}{2}, & u_1 - \frac{1}{2} \leq s_1 \leq u_1 + \frac{1}{2}, \\ v_0 - \frac{1}{2} \leq t_0 \leq v_0 + \frac{1}{2}, & v_1 - \frac{1}{2} \leq t_1 \leq v_1 + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ist dann $A(y)$ die Anzahl der Würfel $\mathfrak{W}(u, v)$, die ganz in $\mathfrak{B}(y)$ enthalten sind, $C(y)$ die Anzahl der Würfel $\mathfrak{W}(u, v)$, deren Durchschnitt mit $\mathfrak{B}(y)$ nicht leer ist, so wird das Volumen $I_2(y)$ des Bereiches $\mathfrak{B}(y)$ durch

$$A(y) \leq I_2(y) \leq C(y)$$

eingeschränkt. Ist $\mathfrak{W}(u, v)$ ganz in $\mathfrak{B}(y)$ enthalten, so liegt auch der Gitterpunkt (u, v) in $\mathfrak{B}(y)$; andererseits ist der Durchschnitt von $\mathfrak{W}(u, v)$ mit $\mathfrak{B}(y)$ gewiß nicht leer, wenn der Gitterpunkt (u, v) zu $\mathfrak{B}(y)$ gehört. Folglich ist auch

$$A(y) \leq T_2(y) \leq C(y)$$

und damit

$$|T_2(y) - I_2(y)| \leq C(y) - A(y).$$

Die Differenz $D(y) = C(y) - A(y)$ zählt offenbar diejenigen Würfel $\mathfrak{W}(u, v)$, die Randpunkte des Bereiches $\mathfrak{B}(y)$ enthalten.

Für einen Randpunkt (s, t) von $\mathfrak{B}(y)$ muß in den Bedingungen

$$2\Phi(s, t) \leq y^4; \qquad s_0^2 + s_1^2 \leq y^2; \qquad t_0^2 + t_1^2 \leq y^2$$

wenigstens einmal das Gleichheitszeichen erfüllt sein. Daher gibt es, weil überdies $\Phi(s, t)$ eine quadratische Form sowohl in (s) als auch in (t) ist, eine positive, absolute Konstante c_{19}, derart daß jeder Würfel $\mathfrak{W}(u, v)$, der einen Randpunkt (s, t) von $\mathfrak{B}(y)$ enthält, in dem Bereiche $\mathfrak{B}(y + c_{19}) - \mathfrak{B}(y - c_{19})$ ganz enthalten ist. Folglich gilt

$$0 \leq D(y) \leq I_2(y + c_{19}) - I_2(y - c_{19})$$

und

$$|T_2(y) - I_2(y)| \leq I_2(y + c_{19}) - I_2(y - c_{19}).$$

Das Integral $I_2(y)$ kann durch Einführung von Polarkoordinaten

$$u_0 = \varrho_1 \cos\varphi_1, \qquad u_1 = \varrho_1 \sin\varphi_1, \qquad v_0 = \varrho_2 \cos\varphi_2, \qquad v_1 = \varrho_2 \sin\varphi_2$$

in das Integral

$$I_2(y) = \int \varrho_1 \varrho_2 \, d\varrho_1 \, d\varrho_2 \, d\varphi_1 \, d\varphi_2$$

über den Bereich

$$2\varrho_1^2 \varrho_2^2 (1 + 2\sin\varphi_1 \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_2) \leq y^4,$$

$$0 \leq \varrho_1 \leq y, \qquad 0 \leq \varrho_2 \leq y, \qquad 0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi, \qquad 0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi$$

und weiter durch Einführung der Veränderlichen

$$s = \varrho_1^2, \qquad t = \varrho_2^2, \qquad \varphi = 2\varphi_1, \qquad \psi = 2\varphi_2$$

in das Integral

$$I_2(y) = \tfrac{1}{4} \int ds \, dt \, d\varphi \, d\psi$$

über den Bereich

$$st(2 + \sin\varphi \sin\psi) \leq y^4,$$

$$0 \leq s \leq y^2, \qquad 0 \leq t \leq y^2, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \qquad 0 \leq \psi \leq 2\pi$$

verwandelt werden. Die Integration über s, t bei festen Werten φ, ψ ergibt

$$I_2(y) = \frac{y^4}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \log(2 + \sin\varphi \sin\psi)}{2 + \sin\varphi \sin\psi} \, d\varphi \, d\psi$$
$$= \gamma_1 y^4$$

mit der im Satze 8 angegebenen Konstanten γ_1.

Infolgedessen ist auch

$$I_2(y + c_{19}) - I_2(y - c_{19}) = \frac{\gamma_1}{4} \left((y + c_{19})^4 - (y - c_{19})^4\right)$$
$$= O(y^3)$$

und damit

$$T_2(y) = \gamma_1 y^4 + O(y^3).$$

Aus dem Satze 8 erhalten wir nun nach (48.2)

$$S_2(x) = \sum_{0 < |u| \leq y} \sum_{0 < |v| \leq y} \delta(u, v)$$
$$- T_2(y) \sum_{|u| \leq y} 1 - \sum_{|v| \leq y} 1 + 1$$
$$= T_2(y) + O(y^2) = \gamma_1 y^4 + O(y^3),$$

also

$$S_2(x) = 2\gamma_1 x^2 + O(x^{\frac{3}{2}}). \tag{57}$$

Fassen wir die so erhaltenen Werte $S_1(x)$, $S_2(x)$ aus (54) und (57) zu $P_{1,1}(x)$ zusammen, so entsteht aus (48.3)

$$P_{1,1}(x) = 2\{2\pi\beta_0 x^2 \log x + \pi(\beta_0 \log 2 + \gamma_0) x^2 + O(x^{\frac{3}{2}})\} - 2\gamma_1 x^2 + O(x^{\frac{3}{2}})$$

oder

$$P_{1,1}(x) = 4\pi\beta_0 x^2 \log x + (2\pi\gamma_0 - 2\pi\beta_0 + \gamma_2) x^2 + O(x^{\frac{3}{2}}) \tag{58.1}$$

mit der Konstanten

$$\gamma_2 = -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\log\left(1+\frac{1}{2}\sin\varphi\sin\psi\right)}{1+\frac{1}{2}\sin\varphi\sin\psi}\,d\varphi\,d\psi. \tag{58.2}$$

Es ist nämlich nach einem bekannten elementaren Integral

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi\,d\psi}{2+\sin\varphi\sin\psi} = \pi\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\varphi}} = 4\pi\beta_0$$

und daher

$$\begin{aligned}
2\pi\beta_0\log 2 - 2\gamma_1 &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\log 2\,d\varphi\,d\psi}{2+\sin\varphi\sin\psi} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\log(2+\sin\varphi\sin\psi)}{2+\sin\varphi\sin\psi}\,d\varphi\,d\psi \\
&= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\log\left(1+\frac{1}{2}\sin\varphi\sin\psi\right)}{1+\frac{1}{2}\sin\varphi\sin\psi}\,d\varphi\,d\psi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi\,d\psi}{2+\sin\varphi\sin\psi} \\
&= \gamma_2 - 2\pi\beta_0.
\end{aligned}$$

Aus der Gl. (40) ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
P_{1,1}^*(x) &= \frac{1}{4}\sum_{1\le d_1 d_2\le x}\mu(d_1)\,\mu(d_2)\,P_{1,1}\left(\frac{x}{d_1 d_2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{1\le d_1 d_2\le x}\mu(d_1)\,\mu(d_2)\left\{4\pi\beta_0\frac{x^2}{d_1^2 d_2^2}\log\frac{x}{d_1 d_2} + \right. \\
&\quad \left. + (2\pi\gamma_0 - 2\pi\beta_0 + \gamma_2)\frac{x^2}{d_1^2 d_2^2} + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{d_1^{\frac{3}{2}} d_2^{\frac{3}{2}}}\right)\right\} \\
&= \pi\beta_0 x^2\log x\sum_{1\le d_1 d_2\le x}\frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)}{d_1^2 d_2^2} - \\
&\quad - \pi\beta_0 x^2\sum_{1\le d_1 d_2\le x}\frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)}{d_1^2 d_2^2}\log d_1 d_2 + \\
&\quad + \frac{1}{4}(2\pi\gamma_0 - 2\pi\beta_0 + \gamma_2)\,x^2\sum_{1\le d_1 d_2\le x}\frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)}{d_1^2 d_2^2} + \\
&\quad + O\left(x^{\frac{3}{2}}\sum_{1\le d_1 d_2\le x} d_1^{-\frac{3}{2}} d_2^{-\frac{3}{2}}\right)
\end{aligned}$$

und wegen

$$\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{1}{\zeta(2)}\,; \qquad \sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}\log d = \frac{\zeta'(2)}{\zeta^2(2)}$$

weiter

$$\begin{aligned}
P_{1,1}^*(x) &= \frac{\pi\beta_0}{\zeta^2(2)}x^2\log x - \frac{2\pi\beta_0\zeta'(2)}{\zeta^3(2)}x^2 + \frac{2\pi\gamma_0 - 2\pi\beta_0 + \gamma_2}{4\zeta^2(2)}x^2 + \\
&\quad + O\left(x^2\log x\sum_{d_1 d_2 > x}\frac{1}{d_1^2 d_2^2}\right) + O\left(x^2\sum_{d_1 d_2 > x}\frac{\log d_1 d_2}{d_1^2 d_2^2}\right) + \\
&\quad + O\left(x^2\sum_{d_1 d_2 > x}\frac{1}{d_1^2 d_2^2}\right) + O\left(x^{\frac{3}{2}}\sum_{1\le d_1 d_2\le x} d_1^{-\frac{3}{2}} d_2^{-\frac{3}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Bezeichnet man mit $\tau(n)$ die Teileranzahl der natürlichen Zahl n, so ist bekanntlich[5])

$$\tau(n) = O(n^{\varepsilon}) \qquad \text{für jedes } \varepsilon > 0$$

und daher

$$\sum_{d_1 d_2 \leq x} \frac{1}{d_1^2 d_2^2} = \sum_{n \leq x} \frac{\tau(n)}{n^2} = O\left(\sum_{n \leq x} n^{\varepsilon - 2}\right) = O(x^{\varepsilon - 1})$$

$$\sum_{d_1 d_2 > x} \frac{\log d_1 d_2}{d_1^2 d_2^2} = \sum_{n > x} \frac{\tau(n) \log n}{n^2} = O\left(\sum_{n > x} n^{\varepsilon - 2} \log n\right) = O(x^{\varepsilon' - 1});$$

überdies gilt

$$\sum_{1 \leq d_1 d_2 \leq x} d_1^{-\frac{3}{2}} d_2^{-\frac{3}{2}} \leq \sum_{d_1 = 1}^{\infty} \sum_{d_2 = 1}^{\infty} d_1^{-\frac{3}{2}} d_2^{-\frac{3}{2}} = O(1).$$

Hieraus erhält man

$$P_{1.1}^{*}(x) = \frac{\pi \beta_0}{\zeta^2(2)} x^2 \log x - \left(\frac{\pi \gamma_0}{2\zeta^2(2)} - \frac{\pi \beta_0 \zeta'(2)}{\zeta^3(2)} - \frac{\pi \beta_0}{2\zeta^2(2)} + \frac{\gamma_2}{4\zeta^2(2)}\right) x^2 + O(x^{\frac{3}{2}}),$$

folglich nach Satz 6

$$R_{2.1}^{*}(x) = \tfrac{1}{2} P_{1.1}^{*}(x) - O(x)$$

$$= \frac{\pi \beta_0}{2\zeta^2(2)} x^2 \log x - \left(\frac{\pi \gamma_0}{4\zeta^2(2)} - \frac{\pi \beta_0 \zeta'(2)}{2\zeta^3(2)} - \frac{\pi \beta_0}{4\zeta^2(2)} + \frac{\gamma_2}{8\zeta^2(2)}\right) x^2 + O(x^{\frac{3}{2}})$$

in Übereinstimmung mit der Gl. (15.2) des Hauptsatzes 3.

V.

Nach Definition zählt $Q_3(x)$ die ganzen kubischen Formen

$$f(z, a) = (u_0 z_0 + u_1 z_1)(v_0 z_0 + v_1 z_1)(w_0 z_0 + w_1 z_1),$$

die der Normbedingung

$$0 < N^2(f) = \Phi(u, v, w)$$

$$= (u_0 v_0 w_0)^2 + (u_0 v_0 w_1 + u_0 v_1 w_0 + u_1 v_0 w_0)^2 +$$

$$+ (u_1 v_1 w_0 + u_1 v_0 w_1 + u_0 v_1 w_1)^2 + (u_1 v_1 w_1)^2 \leq x^2$$

genügen, also die Gitterpunkte $(u, v, w) = (u_0, u_1, v_0, v_1, w_0, w_1)$ des sechsdimensionalen Raumes, die dem durch die Bedingungen

$$(60.1) \quad \begin{cases} 0 < \Phi(u, v, w) = (u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2)(w_0^2 + w_1^2) + 2(u_0^2 + u_1^2) v_0 v_1 w_0 w_1 + \\ \qquad + 2(v_0^2 + v_1^2) w_0 w_1 u_0 u_1 + 2(w_0^2 + w_1^2) u_0 u_1 v_0 v_1 \leq x^2, \end{cases}$$

$$(60.2) \qquad 1 \leq u_0^2 + u_1^2, \qquad 1 \leq v_0^2 + v_1^2, \qquad 1 \leq w_0^2 + w_1^2$$

gekennzeichneten beschränkten Bereiche $\mathfrak{Q}$ des Raumes angehören.

[5]) Vgl. etwa Landau, E.: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Bd. I, § 60. Leipzig 1909.

Für jeden Punkt (u, v, w) des Raumes besteht, wie man sich leicht überlegt, die Ungleichung

$$(61.1)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}(u_0^2+u_1^2)(v_0^2+v_1^2)(w_0^2+w_1^2) \leqq \Phi(u,v,w) \leqq \\ \qquad\qquad \leqq \frac{5}{2}(u_0^2+u_1^2)(v_0^2+v_1^2)(w_0^2+w_1^2), \end{cases}$$

weshalb für jeden Punkt des Bereiches $\mathfrak{Q}$ die Bedingung

$$(61.2)\qquad (u_0^2+u_1^2)(v_0^2+v_1^2)(w_0^2+w_1^2) \leqq 2\Phi(u,v,w) \leqq 2x^2$$

erfüllt ist. Wir setzen zur Abkürzung

$$(62)\qquad 2x^2 = y^6,$$

$$(63)\qquad |u| = (u_0^2+u_1^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad |v| = (v_0^2+v_1^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad |w| = (w_0^2+w_1^2)^{\frac{1}{2}}$$

und erklären den Wert $\delta(u, v, w)$ für jeden Gitterpunkt des Raumes durch

$$\delta(u,v,w) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (u,v,w) \text{ zu } \mathfrak{Q} \text{ gehört,} \\ 0, & \text{wenn } (u,v,w) \text{ nicht zu } \mathfrak{Q} \text{ gehört.} \end{cases}$$

Dann ist

$$Q_3(x) = \sum_{(u,v,w)} \delta(u,v,w) =$$

$$= \sum_{|u|\leq y,|v|\leq y,|w|\leq y} \delta(u,v,w) + \sum_{|u|\leq y,|v|\leq y,|w|>y} \delta(u,v,w) + \sum_{|u|\leq y,|v|>y,|w|\leq y} \delta(u,v,w) +$$

$$+ \sum_{|u|\leq y,|v|>y,|w|>y} \delta(u,v,w) + \sum_{|u|>y,|v|\leq y,|w|\leq y} \delta(u,v,w) + \sum_{|u|>y,|v|\leq y,|w|>y} \delta(u,v,w) +$$

$$+ \sum_{|u|>y,|v|>y,|w|\leq y} \delta(u,v,w) + \sum_{|u|>y,|v|>y,|w|>y} \delta(u,v,w),$$

folglich wegen der Symmetrie der Bedingungen (60) auch

$$Q_3(x) = \sum_{|u|\leq y,|v|\leq y,|w|\leq y} \delta(u,v,w) + 3\sum_{|u|\leq y,|v|\leq y,|w|>y} \delta(u,v,w) +$$

$$+ 3\sum_{|u|>y,|v|>y,|w|\leq y} \delta(u,v,w) + \sum_{|u|>y,|v|>y,|w|>y} \delta(u,v,w)$$

oder

$$Q_3(x) = 3\sum_{|u|\leq y,|v|\leq y}\sum_{(w)} \delta(u,v,w) - 2\sum_{|u|\leq y,|v|\leq y,|w|\leq y} \delta(u,v,w) +$$

$$+ 3\sum_{|u|>y,|v|>y}\sum_{(w)} \delta(u,v,w) - 2\sum_{|u|>y,|v|>y,|w|>y} \delta(u,v,w).$$

Hierin ist aber

$$0 \leq \sum_{|u|\leq y,|v|\leq y,|w|\leq y} \delta(u,v,w) \leq \sum_{|u|\leq y} 1 \cdot \sum_{|v|\leq y} 1 \cdot \sum_{|w|\leq y} 1$$

$$= O(y^6) = O(x^2)$$

und

$$\sum_{|u|>y,|v|>y,|w|>y} \delta(u,v,w) = 0,$$

da die Summationsbedingung

$$y^6 < |u|^2 |v|^2 |w|^2 = (u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2)(w_0^2 + w_1^2) \leqq 2\Phi(u, v, w)$$

mit

$$2\Phi(u, v, w) \leqq 2x^2 = y^6$$

unverträglich ist. Es bleibt demnach, wenn noch zur Abkürzung

$$S_1(x) = \sum_{|u| \leqq y,\, |v| \leqq y} \Big(\sum_{(w)} \delta(u, v, w) \Big), \tag{64.1}$$

$$S_2(x) = \sum_{|u| > y,\, |v| > y} \Big(\sum_{(w)} \delta(u, v, w) \Big) \tag{64.2}$$

gesetzt wird, die Darstellung

$$Q_3(x) = 3\, S_1(x) + 3\, S_2(x) + O(x^2). \tag{64.3}$$

Die Summe

$$E(u, v) = \sum_{(w)} \delta(u, v, w)$$

stellt bei festgehaltenen Werten (u, v) mit $|u \quad v| > 0$ die Anzahl der Gitterpunkte der (im Nullpunkt gelochten) Ellipse

$$0 < 2\Phi(u, v, w) \leqq y^6$$

in der (w)-Ebene dar. Die in (w) quadratische Form $2\Phi(u, v, w)$ besitzt die (symmetrische) Matrix

$$\begin{pmatrix} 2(u_0^2 - u_1^2)(v_0^2 - v_1^2) + 4u_0 u_1 v_0 v_1 & 2(u_0^2 + u_1^2) v_0 v_1 + 2u_0 u_1 (v_0^2 + v_1^2) \\ 2(u_0^2 - u_1^2) v_0 v_1 + 2u_0 u_1 (v_0^2 - v_1^2) & 2(u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2) + 4u_0 u_1 v_0 v_1 \end{pmatrix},$$

deren Eigenwerte $\omega_0 \leqq \omega_1$ nach (61.1) der Beschränkung

$$(u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2) \leqq \omega_0 \leqq \omega_1 \leqq 5(u_0^2 + u_1^2)(v_0^2 + v_1^2)$$

unterliegen, so daß für die Determinante

$$\Delta(u, v) = \omega_0 \omega_1$$

die Beschränkung

$$(u_0^2 + u_1^2)^2 (v_0^2 + v_1^2)^2 \leqq \Delta(u, v) \leqq 25 (u_0^2 + u_1^2)^2 (v_0^2 + v_1^2)^2 \tag{65}$$

vorliegt. Nun gilt nach einem früheren Ergebnis[6]) für die Gitterpunktsanzahl $E(u, v) + 1$ der (ungelochten) Ellipse

$$0 \leqq 2\Phi(u, v, w) \leqq y^6$$

die Ungleichung

$$\left| E(u, v) + 1 - \frac{\pi y^6}{\sqrt{\Delta(u, v)}} \right| < c_{20}(1 + b_0)$$

[6]) Vgl. ZP II, Satz 7.

mit der größeren Halbachse

$$b_0 = \frac{y^3}{\sqrt{\omega_0}} \leqq \frac{y^3}{|u|\,|v|},$$

der Ellipse und daher

$$S_1(x) = \sum_{1 \leqq |u| \leqq y,\, 1 \leqq |v| \leqq y} E(u,v)$$

$$= \sum_{1 \leqq |u| \leqq y,\, 1 \leqq |v| \leqq y} \left(\frac{\pi y^6}{\sqrt{\Delta(u,v)}} - 1 \right) + O\left(y^3 \sum_{1 \leqq |u| \leqq y,\, 1 \leqq |v| \leqq y} \frac{1}{|u|\,|v|} \right)$$

$$= \pi y^6 \sum_{1 \leqq |u| \leqq y,\, 1 \leqq |v| \leqq y} \Delta^{-\frac{1}{2}}(u,v) - \sum_{1 \leqq |u| \leqq y,\, 1 \leqq |v| \leqq y} 1 + O\left(y^3 \sum_{1 \leqq |u| \leqq y,\, 1 \leqq |v| \leqq y} |u|^{-1}\,|v|^{-1} \right).$$

Hierin ist

$$\sum_{1 \leqq |u| \leqq y,\, 1 \leqq |v| \leqq y} 1 = \sum_{1 \leqq |u| \leqq y} 1 \cdot \sum_{1 \leqq |v| \leqq y} 1 = O(y^4)$$

und

$$\sum_{1 \leqq |u| \leqq y,\, 1 \leqq |v| \leqq y} |u|^{-1}\,|v|^{-1} = O\left(\int_1^y \int_1^y \frac{ds\,dt}{st} \right) = O(y^2),$$

folglich

$$S_1(x) = \pi y^6 \sum_{1 \leqq |u| \leqq y,\, 1 \leqq |v| \leqq y} \Delta^{-\frac{1}{2}}(u,v) + O(y^5). \tag{66.1}$$

In gleicher Weise erhält man, da im Bereiche $\mathfrak{L}$ nach (61.1) gewiß für alle Gitterpunkte (u, v, w) gilt:

$$|u|^2\,|v|^2 \leqq |u|^2\,|v|^2\,|w|^2 \leqq 2\Phi(u,v,w) \leqq y^6,$$

für $S_2(x)$ die Gleichung

$$S_2(x) = \sum_{|u|>y,\,|v|>y} E(u,v)$$

$$= \sum_{\substack{|u||v| \leqq y^3 \\ |u|>y,\,|v|>y}} \left(\frac{\pi y^6}{\sqrt{\Delta(u,v)}} - 1 \right) + O\left(y^3 \sum_{\substack{|u||v| \leqq y^3 \\ |u|>y,\,|v|>y}} |u|^{-1}\,|v|^{-1} \right)$$

$$= \pi y^6 \sum_{\substack{|u||v| \leqq y^3 \\ |u|>y,\,|v|>y}} \Delta^{-\frac{1}{2}}(u,v) - \sum_{\substack{|u||v| \leqq y^3 \\ |u|>y,\,|v|>y}} 1 + O\left(y^3 \sum_{\substack{|u||v| \leqq y^3 \\ |u|>y,\,|v|>y}} |u|^{-1}\,|v|^{-1} \right).$$

Hierin ist

$$0 \leqq \sum_{\substack{|u||v| \leqq y^3 \\ |u|>y,\,|v|>y}} 1 = \sum_{y < |u| \leqq y^2} \left(\sum_{y < |v| \leqq \frac{y^3}{|u|}} 1 \right)$$

$$= O\left(\sum_{y < |u| \leqq y^2} \frac{y^6}{|u|^2} \right) = O\left(y^6 \int_y^{y^2} \frac{dt}{t} \right)$$

$$= O(y^6 \log y)$$

und

$$\sum_{\substack{|u||v| \leqq y^3 \\ |u|>y,\,|v|>y}} |u|^{-1}\,|v|^{-1} = O\left(\int_y^{y^2} \int_y^{y^3/s} \frac{ds\,dt}{st} \right) = O(y^3 \log y).$$

Folglich gilt

$$S_2(x) = \pi y^6 \sum_{\substack{|u||v| \leqq y^3 \\ |u|>y,\ |v|>y}} \Delta^{-\frac{1}{2}}(u,v) + O(x^2 \log x). \tag{66.2}$$

Wir entnehmen daraus, wenn noch $2x^2 = y^6$ beachtet wird:

$$Q_3(x) = 6\pi x^2 \left(\sum_{1 \leqq |u| \leqq y,\ 1 \leqq |v| \leqq y} \Delta^{-\frac{1}{2}}(u,v) + \sum_{\substack{|u||v| \leqq y^3 \\ |u|>y,\ |v|>y}} \Delta^{-\frac{1}{2}}(u,v) \right) + O(x^2 \log x). \tag{67}$$

Satz 9. *Die Summen*

$$F_1(x) = \sum_{1 \leqq |u| \leqq y,\ 1 \leqq |v| \leqq y} \Delta^{-\frac{1}{2}}(u,v), \tag{68.1}$$

$$F_2(x) = \sum_{\substack{|u||v| \leqq y^3 \\ |u|>y,\ |v|>y}} \Delta^{-\frac{1}{2}}(u,v) \tag{68.2}$$

genügen den Gleichungen

$$F_1(x) = \tfrac{8}{9} \gamma_3 \log^2 x + O(\log x), \tag{69.1}$$

$$F_2(x) = \tfrac{4}{9} \gamma_3 \log^2 x + O(\log x) \tag{69.2}$$

mit der Konstanten

$$\gamma_3 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi\, d\psi}{\sqrt{(\frac{1}{4} - \cos^2\varphi \cos^2\psi)\ (\frac{1}{4} + \sin^2\varphi \sin^2\psi)}}. \tag{69.3}$$

Zum Beweise ordnen wir jedem Gitterpunkte (u, v) des vierdimensionalen Raumes mit $|u|\,|v| > 0$ den Würfel

$$\mathfrak{W}(u,v): \quad \begin{aligned} &u_0 - \tfrac{1}{2} \leqq s_0 \leqq u_0 + \tfrac{1}{2}, \qquad u_1 - \tfrac{1}{2} \leqq s_1 \leqq u_1 + \tfrac{1}{2}, \\ &v_0 - \tfrac{1}{2} \leqq t_0 \leqq v_0 + \tfrac{1}{2}, \qquad v_1 - \tfrac{1}{2} \leqq t_1 \leqq v_1 + \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

zu und nennen $C_1(x)$ bzw. $C_2(x)$ die Summen

$$C_1(x) = \sum_{1 \leqq |u| \leqq y,\ 1 \leqq |v| \leqq y} \iint_{\mathfrak{W}(u,v)} \frac{ds_0\, ds_1\, dt_0\, dt_1}{\sqrt{\Delta(s,t)}}, \tag{70.1}$$

$$C_2(x) = \sum_{\substack{|u||v| \leqq y^3 \\ |u|>y,\ |v|>y}} \iint_{\mathfrak{W}(u,v)} \frac{ds_0\, ds_1\, dt_0\, dt_1}{\sqrt{\Delta(s,t)}}. \tag{70.2}$$

Ferner führen wir für zwei beliebige positive Größen $y_0 < y_1$ das Integral

$$I_1(y_0, y_1) = \int_{\substack{y_0 \leqq |s| \leqq y_1 \\ y_0 \leqq |t| \leqq y_1}} \frac{ds_0\, ds_1\, dt_0\, dt_1}{\sqrt{\Delta(s,t)}}, \tag{71.1}$$

für beliebige positive Größen y_0, y_1 mit $y_0^2 < y_1^3$ das Integral

$$I_2(y_0, y_1) = \int_{\substack{|s||t| \leqq y_1^3 \\ |s|>y_0,\ |t|>y_0}} \frac{ds_0\, ds_1\, dt_0\, dt_1}{\sqrt{\Delta(s,t)}} \tag{71.2}$$

ein, deren Werte sich leicht berechnen lassen. Einführung von Polarkoordinaten

$$s_0 = \varrho_1 \cos\varphi_1, \qquad s_1 = \varrho_1 \sin\varphi_1,$$
$$t_0 = \varrho_2 \cos\varphi_2, \qquad t_1 = \varrho_2 \sin\varphi_2$$

und der Funktion

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 & \frac{1}{2}(\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2) \\ \frac{1}{2}(\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2) & 1 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_1 \sin 2\varphi_2 \end{vmatrix}, \tag{72}$$

die mit der Determinante $\Delta(s,t)$ im Zusammenhang

$$\Delta(s,t) = 4\varrho_1^4 \varrho_2^4 f(\varphi_1, \varphi_2) \tag{73}$$

steht, ergibt

$$I_1(y_0, y_1) = \frac{1}{2}\int_{y_0}^{y_1}\int_{y_0}^{y_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varrho_1\, d\varrho_2\, d\varphi_1\, d\varphi_2}{\varrho_1 \varrho_2 \sqrt{f(\varphi_1, \varphi_2)}}$$

$$I_2(y_0, y_1) = \frac{1}{2}\int_{y_0}^{y_1^3/y_0}\int_{y_0}^{y_1^3/\varrho_1}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varrho_1\, d\varrho_2\, d\varphi_1\, d\varphi_2}{\varrho_1 \varrho_2 \sqrt{f(\varphi_1, \varphi_2)}}$$

oder in einfacher Rechnung

$$I_1(y_0, y_1) = \frac{c_{21}}{2} \log^2 \frac{y_1}{y_0}$$

$$I_2(y_0, y_1) = \frac{c_{21}}{4} \log^2 \frac{y_1^3}{y_0^2}$$

mit der Konstanten

$$c_{21} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1\, d\varphi_2}{\sqrt{f(\varphi_1, \varphi_2)}}.$$

Eine leichte Umformung ergibt

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(1 + \sin 2\varphi_1)(1 + \sin 2\varphi_2)\right)\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(1 - \sin 2\varphi_1)(1 - \sin 2\varphi_2)\right)$$

und daher

$$c_{21} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1\, d\varphi_2}{\sqrt{(\frac{1}{4} + \cos^2\varphi_1 \cos^2\varphi_2)(\frac{1}{4} + \sin^2\varphi_1 \sin^2\varphi_2)}}$$
$$= 16\gamma_3$$

in der Bezeichnung des Satzes 9. Somit ist

$$I_1(y_0, y_1) = 8\gamma_3 \log^2 \frac{y_1}{y_0}, \tag{75.1}$$

$$I_2(y_0, y_1) = 4\gamma_3 \log^2 \frac{y_1^3}{y_0^2}. \tag{75.2}$$

Für jeden Punkt (s,t) eines Würfels $\mathfrak{W}(u,v)$ zum Gitterpunkt (u,v) gilt nun, da $\Delta(u,v)$ eine biquadratische Form sowohl in (u) als auch in (v) ist,

$$\left|\frac{1}{\Delta(u,v)} - \frac{1}{\Delta(s,t)}\right| = \frac{|\Delta(s,t) - \Delta(u,v)|}{|\Delta(u,v)|\,|\Delta(s,t)|\,(|\Delta(u,v)| + |\Delta(s,t)|)}$$
$$< c_{22}\frac{|u|^3|v|^4 + |u|^4|v|^3}{|u|^6|v|^6}$$
$$= c_{22}\left(\frac{1}{|u|^3|v|^2} + \frac{1}{|u|^2|v|^3}\right).$$

Daher ist

$$|F_1(x) - C_1(x)| < c_{22} \sum_{1 < |u| \leqq y,\ 1 < |v| > 1} \left(\frac{1}{|u|^3 |v|^2} + \frac{1}{|u|^2 |v|^3} \right)$$

$$= O\left(\int_1^y \int_1^y \frac{d\varrho_1}{\varrho_1^2} \frac{d\varrho_2}{\varrho_2} \right) = O(\log y)$$

und

$$|F_2(x) - C_2(x)| < c_{22} \sum_{\substack{|u||v| \leqq y^3 \\ |u| > y,\ |v| > y}} \left(\frac{1}{|u|^3 |v|^2} + \frac{1}{|u|^2 |v|^3} \right)$$

$$= O\left(\int_{\substack{\varrho_1 \varrho_2 \leqq y^3 \\ \varrho_1 > y,\ \varrho_2 > y}} \frac{d\varrho_1 d\varrho_2}{\varrho_1^2 \varrho_2} \right) = O\left(\frac{\log y}{y} \right),$$

also jedenfalls

$$F_1(x) = C_1(x) + O(\log y), \tag{76.1}$$

$$F_2(x) = C_2(x) + O(\log y). \tag{76.2}$$

Ist der Gitterpunkt (u, v) in dem Bereich

$$1 \leqq |u| \leqq y, \qquad 1 \leqq |v| \leqq y$$

enthalten, so ist der Würfel $\mathfrak{W}(u, v)$ gewiß ganz im Bereich

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq |s| \leqq y + \frac{1}{\sqrt{2}}; \qquad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq |t| \leqq y + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

enthalten; andererseits wird der Bereich

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq |s| \leqq y - \frac{1}{\sqrt{2}}; \qquad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq |t| \leqq y - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ganz von den Würfeln $\mathfrak{W}(u, v)$ überdeckt, deren Mittelpunkte den Bedingungen

$$1 \leqq |u| \leqq y, \qquad 1 \leqq |v| \leqq y$$

genügen. Infolgedessen ist nach (75.1)

$$I_1\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}},\ y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leqq C_1(x) \leqq I_1\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}},\ y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

oder

$$8\gamma_3 \log^2 \frac{y - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \leqq C_1(x) \leqq 8\gamma_3 \log^2 \frac{y + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Hieraus folgt aber sogleich

$$C_1(x) = 8\gamma_3 \log^2 y + O(\log y),$$

wegen (76.1)

$$F_1(x) = 8\gamma_3 \log^2 y + O(\log y),$$

also wegen $2x^2 = y^6$

$$F_1(x) = \tfrac{8}{9}\gamma_3 \log^2 x + O(\log x). \tag{77.1}$$

Ist der Gitterpunkt (u, v) in dem Bereich

$$|u|\,|v| \leqq y^3, \qquad |u| > y, \qquad |v| > y$$

enthalten, so ist, wie man sich leicht überlegt, der Würfel $\mathfrak{W}(u, v)$ für alle hinreichend großen $y > c_{23}$ ganz im Bereich

$$|u|\,|v| \leqq \left(y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3, \qquad |u| > y - \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad |v| > y - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

enthalten, während andererseits der Bereich

$$|s|\,|t| \leqq \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3, \qquad |s| > y + \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad |t| > y + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

mit $y > c_{23}$ von den Würfeln $\mathfrak{W}(u, v)$ ganz überdeckt wird, deren Mittelpunkte (u, v) im Bereiche

$$|u|\,|v| \leqq y^3, \qquad |u| > y, \qquad |v| > y$$

liegen. Folglich gilt auch hier für alle hinreichend großen $y > c_{24}$

$$I_2\left(y + \frac{1}{\sqrt{2}},\ y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leqq C_2(x) \leqq I_2\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}},\ y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

oder

$$4\gamma_3 \log^2 \frac{\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{\left(y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \leqq C_2(x) \leqq 4\gamma_3 \log^2 \frac{\left(y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2},$$

also

$$C_2(x) = 4\gamma_3 \log^2 y + O(\log y),$$

wegen (76.2)

$$F_2(x) = 4\gamma_3 \log^2 y + O(\log y),$$

also wegen $2x^2 = y^6$

$$F_2(x) = \tfrac{4}{9}\gamma_3 \log^2 x + O(\log x). \tag{77.2}$$

Satz 10. *Die Gitterpunktsanzahl $Q_3(x)$ genügt der Gleichung*

$$Q_3(x) = 8\pi\gamma_3 x^2 \log^2 x + O(x^2 \log x) \tag{78}$$

mit der in (69.3) *angegebenen Konstanten γ_3.*

Nach (67) ist nämlich

$$Q_3(x) = 6\pi x^2 (F_1(x) + F_2(x)) + O(x^2 \log x),$$

also nach (77.1) und (77.2)

$$\begin{aligned} Q_3(x) &= 6\pi x^2 \{\tfrac{8}{9}\gamma_3 \log^2 x + \tfrac{4}{9}\gamma_3 \log^2 x + O(\log x)\} + O(x^2 \log x) \\ &= 8\pi\gamma_3 x^2 \log^2 x + O(x^2 \log x). \end{aligned}$$

Der Übergang zur Anzahl $Q_3^*(x)$ der primitiven Formen aus $Q_3(x)$ geschieht nun in folgender Weise: Jedes Tripel primitiver Linearformen

$$u_0^* z_0 + u_1^* z_1, \quad v_0^* z_0 + v_1^* z_1, \quad w_0^* z_0 + w_1^* z_1,$$

deren Produkt in der Anzahl $Q_3^*(x)$ zu zählen ist, liefert durch Vorgabe beliebiger Inhalte d_1, d_2, d_3 und beliebiger Vorzeichen acht Tripel von Linearformen

$$\pm d_1(u_0^* z_0 + u_1^* z_1), \quad \pm d_2(v_0^* z_0 + v_1^* z_1), \quad \pm d_3(w_0^* z_0 + w_1^* z_1),$$

deren Produkte in $Q_3(x\, d_1\, d_2\, d_3)$ zu zählen sind. Infolgedessen besteht die Gleichung

$$Q_3(x) = \sum_{d_1 d_2 d_3 \leq x} 8\, Q_3^*\left(\frac{x}{d_1 d_2 d_3}\right),$$

worin die Summation über Tripel natürlicher Zahlen d_1, d_2, d_3 vorzunehmen ist, deren Produkt $d_1 d_2 d_3$ die Normschranke x nicht übertrifft. Hieraus erhält man durch eine dreifache Umkehrung:

$$Q_3^*(x) = \frac{1}{8} \sum_{d_1 d_2 d_3 \leq x} \mu(d_1)\, \mu(d_2)\, \mu(d_3)\, Q_3\left(\frac{x}{d_1 d_2 d_3}\right),$$

also nach Satz 10:

$$\begin{aligned} Q_3^*(x) = {} & \frac{1}{8} \sum_{d_1 d_2 d_3 \leq x} \mu(d_1)\, \mu(d_2)\, \mu(d_3) \times \\ & \times \left\{ 8\pi\gamma_3 \frac{x^2}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} \log^2 \frac{x}{d_1 d_2 d_3} + O\left(\frac{x^2}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} \log \frac{x}{d_1 d_2 d_3} \right) \right\} \\ = {} & \pi\gamma_3 x^2 \log^2 x \sum_{d_1 d_2 d_3 \leq x} \frac{\mu(d_1)\, \mu(d_2)\, \mu(d_3)}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} - \\ & - 2\pi\gamma_3 x^2 \log x \sum_{d_1 d_2 d_3 \leq x} \frac{\mu(d_1)\, \mu(d_2)\, \mu(d_3)}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} \log d_1 d_2 d_3 + \\ & + \pi\gamma_3 x^2 \sum_{d_1 d_2 d_3 \leq x} \frac{\mu(d_1)\, \mu(d_2)\, \mu(d_3)}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} \log^2 d_1 d_2 d_3 + \\ & + O\left(x^2 \log x \sum_{d_1 d_2 d_3 \leq x} \frac{1}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} \right). \end{aligned}$$

Hierin ist

$$\sum_{d_1 d_2 d_3 \leq x} \frac{\mu(d_1)\, \mu(d_2)\, \mu(d_3)}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} = \frac{1}{\zeta^3(2)} - \sum_{d_1 d_2 d_3 > x} \frac{\mu(d_1)\, \mu(d_2)\, \mu(d_3)}{d_1^2 d_2^2 d_3^2}$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{d_1 d_2 d_3 > x} \frac{\mu(d_1)\, \mu(d_2)\, \mu(d_3)}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} \Big| & \leq \sum_{d_1=1}^{\infty} \sum_{d_2 d_3 > x/d_1} \frac{1}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} \\ & = \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1^2} \sum_{n > x/d_1} \frac{\tau(n)}{n^2} = O\left(\sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1^2} \sum_{n > x/d_1} n^{\varepsilon-2} \right) \\ & = O\left(\sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1^2} \left(\frac{x}{d_1} \right)^{\varepsilon-1} \right) = O\left(x^{\varepsilon-1} \sum_{d_1=1}^{\infty} \frac{1}{d_1^{1+\varepsilon}} \right) \\ & = O(x^{\varepsilon-1}) = O\left(\frac{1}{\log x} \right), \end{aligned}$$

ferner

$$\left|\sum_{d_1 d_2 d_3 \le x} \frac{1}{d_1^2 d_2^2 d_3^2}\right| \le \sum_{d_1, d_2, d_3 = 1}^{\infty} \frac{1}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} = O(1),$$

$$\sum_{d_1 d_2 d_3 \le x} \frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)\,\mu(d_3)}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} \log d_1 d_2 d_3$$

$$\le 3 \sum_{d_1, d_2, d_3 = 1}^{\infty} \frac{\log d_1}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} = O(1),$$

$$\left|\sum_{d_1 d_2 d_3 < x} \frac{\mu(d_1)\,\mu(d_2)\,\mu(d_3)}{d_1^2 d_2^2 d_3^2} \log^2 d_1 d_2 d_3\right| = O(1).$$

Demnach gilt

$$Q_3^*(x) = \frac{\pi \gamma_3}{\zeta^3(2)} x^2 \log^2 x + O(x^2 \log x). \tag{79}$$

Die Anzahl $R_{3,1}^*(x)$ der primitiven irreduziblen Formen der Klasse $\mathfrak{K}_{3,1}^*(x)$ ergibt sich nun leicht auf Grund des Satzes 6. Danach ist

$$R_{3,1}^*(x) = P_{1,2}^*(x) - \tfrac{1}{3} Q_3^*(x) + O(x^2),$$

also nach Satz 5

$$R_{3,1}^*(x) = \frac{\alpha_3 \eta(3)}{4\zeta^2(3)} x^3 + O(x^2 \log x) \qquad \frac{\pi \gamma_3}{3\zeta^3(2)} x^2 \log^2 x - O(x^2 \log x)$$

oder auch

$$R_{3,1}^*(x) = \frac{\alpha_3 \eta(3)}{4\zeta^2(3)} x^3 - \frac{\alpha_3 \gamma_3}{4\zeta^3(2)} x^2 \log^2 x + O(x^2 \log x) \tag{80}$$

in Übereinstimmung mit der Gl. (16.2) des Hauptsatzes 3.

VI.

Nach Definition zählt $P_{2,2}(x)$ die Anzahl der ganzen biquadratischen Formen

$$f(z, a) = (u_0 z_0^2 + u_1 z_0 z_1 + u_2 z_1^2)(v_0 z_0^2 + v_1 z_0 z_1 + v_2 z_1^2),$$

die der Normbedingung

$$0 < N^2(f) = \Phi(u, v)$$
$$= (u_0 v_0)^2 + (u_0 v_1 + u_1 v_0)^2 + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0)^2 +$$
$$+ (u_1 v_2 + u_2 v_1)^2 + (u_2 v_2)^2 \le x^2$$

genügen, also die Anzahl der Gitterpunkte $(u, v) = (u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, v_2)$ des sechsdimensionalen Raumes, die dem durch die Bedingung

$$\begin{cases} 0 < \Phi(u, v) = (u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)(v_0^2 + v_1^2 + v_2^2) - \\ \qquad + 2u_1(u_0 + u_2) v_1 (v_0 + v_2) + 2u_0 u_2 v_0 v_2 \le x^2 \end{cases} \tag{81}$$

gekennzeichneten Bereich $\mathfrak{P}$ des Raumes angehören. Man überzeugt sich auf sehr einfachem Wege davon, daß für alle Punkte (u, v) des Raumes die Ungleichung

$$\tfrac{1}{2}(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)(v_0^2 + v_1^2 + v_2^2) \le \Phi(u, v) \le \tfrac{3}{2}(u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)(v_0^2 + v_1^2 + v_2^2) \tag{82.1}$$

besteht, so daß für alle dem Bereiche $\mathfrak{P}$ angehörenden Punkte die Ungleichung

$$0 < (u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)(v_0^2 + v_1^2 + v_2^2) \leqq 2\Phi(u, v) \leqq 2x^2 \tag{82.2}$$

erfüllt ist. Zur Abkürzung setzen wir

$$2x^2 = y^4$$

und

$$|u| = (u_0^2 + u_1^2 + u_2^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad |v| = (v_0^2 + v_1^2 + v_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Erklären wir noch die Funktion $\delta(u, v)$ für alle Gitterpunkte (u, v) des sechsdimensionalen Raumes durch

$$\delta(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (u, v) \text{ zu } \mathfrak{P} \text{ gehört,} \\ 0, & \text{wenn } (u, v) \text{ nicht zu } \mathfrak{P} \text{ gehört,} \end{cases}$$

so ist

$$\begin{aligned} P_{2,2}(x) &= \sum_{(u,v)} \delta(u, v) \\ &= \sum_{|u| \leq y, |v| \leq y} \delta(u, v) + \sum_{|u| \leq y, |v| > y} \delta(u, v) \\ &\quad + \sum_{|u| > y, |v| \leq y} \delta(u, v) + \sum_{|u| > y, |v| > y} \delta(u, v) \\ &= 2 \sum_{|u| \leq y} \sum_{(v)} \delta(u, v) - \sum_{|u| \leq y, |v| \leq y} \delta(u, v) + \sum_{|u| > y, |v| > y} \delta(u, v). \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$0 \leqq \sum_{|u| \leq y, |v| < y} \delta(u, v) \leqq \Big(\sum_{|u| \leq y} 1\Big)\Big(\sum_{|v| \leq y} 1\Big) = O(y^6) = O(x^3)$$

und

$$\sum_{u > y, |v| > y} \delta(u, v) = 0,$$

da nach (82) die Bedingungen

$$y^4 < |u|^2 |v|^2 \leqq 2\Phi(u, v) \quad \text{und} \quad 2\Phi(u, v) \leqq 2x^2 = y^4$$

nicht verträglich sind. Damit haben wir erhalten:

$$P_{2,2}(x) = 2 \sum_{|u| \leq y} \sum_{(v)} \delta(u, v) + O(x^3). \tag{83}$$

Bei festen Werten (u) mit $|u| > 0$ stellt die Summe

$$E(u) = \sum_{(v)} \delta(u, v)$$

die Anzahl der Gitterpunkte (v) des dreidimensionalen (v)-Raumes dar, die dem durch die Bedingung

$$0 < 2\Phi(u, v) \leqq y^4$$

gekennzeichneten (im Nullpunkte gelochten) Ellipsoid $\mathfrak{E}(u)$ angehören. Die Anzahl $E(u)$ kann nach dem schon einmal herangezogenen Verfahren[7]) leicht bestimmt werden: Die quadratische Form $2\Phi(u, v)$ bei festen Werten (u)

[7]) Vgl. ZP II, Satz 7.

besitzt die (symmetrische) Matrix

$$\begin{pmatrix} 2(u_0^2+u_1^2+u_2^2) & 2u_1(u_0+u_2) & 2u_0u_2 \\ 2u_1(u_0+u_2) & 2(u_0^2+u_1^2+u_2^2) & 2u_1(u_0+u_2) \\ 2u_0u_2 & 2u_1(u_0+u_2) & 2(u_0^2+u_1^2+u_2^2) \end{pmatrix}$$

mit Eigenwerten $\omega_0 \leqq \omega_1 \leqq \omega_2$, die wegen (82.1) bei festen Werten (u) nach beiden Richtungen beschränkt sind:

$$|u|^2 \leqq \omega_0 \leqq \omega_1 \leqq \omega_2 \leqq 3\,|u|^2$$

und der Determinante

$$\Delta(u) = \omega_0\omega_1\omega_2,$$

für die entsprechend eine Ungleichung

$$|u|^6 \leqq \Delta(u) \leqq 27\,|u|^6$$

besteht. Für die Hauptachsen $b_0 \geqq b_1 \geqq b_2$ des Ellipsoids $\mathfrak{E}(u)$ gelten dann auch die Beschränkungen

$$b_\nu = \frac{y^2}{\sqrt{\omega_\nu}} \leqq \frac{y^2}{|u|} \qquad (\nu = 0, 1, 2).$$

Mithin gilt

$$E(u) + 1 - \frac{\alpha_3 y^6}{\sqrt{\Delta(u)}} | < c_{25}(1+b_0)(1+b_1) < c_{26}\frac{y^4}{u^2}$$

und weiter

$$P_{2,2}(x) = \sum_{1\leq|u|\leq y} E(u) = \sum_{1\leq|u|\leq y}\left(\frac{\alpha_3 y^6}{\sqrt{\Delta(u)}} - 1\right) + O\left(y^4 \sum_{1\leq|u|\leq y}\frac{1}{u^2}\right) + O(x^3).$$

Hieraus entsteht wegen

$$\sum_{1\leq|u|\leq y}\frac{1}{u^2} = O\left(\int_1^y dt\right) = O(y)$$

und der Gleichung $2x^2 = y^4$ die Darstellung

$$P_{2,2}(x) = 2\sqrt{2}\,\alpha_3 x^3 \sum_{1\leq|u|\leq y}\Delta^{-\frac{1}{2}}(u) + O(x^3). \tag{84}$$

Satz 11. *Für $y \geqq 1$ genügt die Summe*

$$S(x) = \sum_{1\leq|u|\leq y}\Delta^{-\frac{1}{2}}(u) \tag{85.1}$$

der Gleichung

$$S(x) = \sqrt{2}\,\gamma_4 \log x + O(1) \tag{85.2}$$

mit der Konstanten

$$\gamma_4 = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{(2-\cos^2\varphi\cos\psi)(2+\cos^2\varphi\cos\psi-\sin^2 2\varphi(1+\cos\psi))}}. \tag{85.3}$$

Zum Beweise umgeben wir jeden Gitterpunkt $(u) = (u_0, u_1, u_2)$ mit $u > 0$ mit dem Würfel

$$\mathfrak{W}(u): \quad u_\nu - \tfrac{1}{2} \leqq s_\nu \leqq u_\nu + \tfrac{1}{2} \qquad (\nu = 0, 1, 2)$$

und setzen:

$$T(x) = \sum_{1 \leqq |u| \leqq y} \iiint_{\mathfrak{W}(u)} \frac{ds_0\, ds_1\, ds_2}{\sqrt{\Delta(s)}},$$

ferner für beliebige positive Größen $y_0 < y_1$

$$I(y_0, y_1) = \iiint_{y_0 \leqq |s| \leqq y_1} \frac{ds_0\, ds_1\, ds_2}{\sqrt{\Delta(s)}}.$$

Es ist dann, wenn räumliche Polarkoordinaten

$$s_0 = \varrho \cos\varphi \cos\psi, \qquad s_1 = \varrho \sin\varphi, \qquad s_2 = \varrho \cos\varphi \sin\psi$$

eingeführt werden,

$$I(y_0, y_1) = \int_{y_0}^{y_1} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{\varrho^2\, d\varrho \cos\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\varrho^3 \sqrt{f(\varphi, \psi)}}$$

mit der Funktion

$$(86)\quad f(\varphi, \psi) = \begin{vmatrix} 2 & \sin 2\varphi\,(\cos\psi + \sin\psi) & \cos^2\varphi \sin 2\psi \\ \sin 2\varphi\,(\cos\psi + \sin\psi) & 2 & \sin 2\varphi\,(\cos\psi + \sin\psi) \\ \cos^2\varphi \sin 2\psi & \sin 2\varphi\,(\cos\psi + \sin\psi) & 2 \end{vmatrix}$$

und demnach

$$(87)\qquad I(y_0, y_1) = c_{27} \log \frac{y_1}{y_0},$$

worin c_{27} die Konstante

$$c_{27} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{f(\varphi, \psi)}}$$

bezeichnet. Man findet

$$f(\varphi, \psi) = 2(2 - \cos^2\varphi \sin 2\psi)\,(2 - \cos^2\varphi \sin 2\psi - \sin^2 2\varphi\,(1 + \sin 2\psi))$$

und durch eine einfache Umformung

$$c_{27} = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi\, d\psi}{\sqrt{(2 - \cos^2\varphi \cos\psi)\,(2 + \cos^2\varphi \cos\psi - \sin^2 2\varphi\,(1 + \cos\psi))}}$$
$$= 2\sqrt{2}\,\gamma_4$$

in der Bezeichnung des Satzes 11.

Nun ist für jeden Punkt (s) des Würfels $\mathfrak{W}(u)$

$$|\Delta^{-\frac{1}{2}}(u) - \Delta^{-\frac{1}{2}}(s)| = \frac{|\Delta(s) - \Delta(u)|}{\sqrt{\Delta(s)\,\Delta(u)}\,(\sqrt{\Delta(s)} + \sqrt{\Delta(u)})}$$

und weiter, da $\Delta(u)$ eine Form sechsten Grades in (u) ist:

$$|\Delta^{-\frac{1}{2}}(u) - \Delta^{-\frac{1}{2}}(s)| \leq c_{28} \frac{|u|^5}{|u|^9}$$

$$= c_{28} |u|^{-4}.$$

Hieraus folgt

$$|S(x) - T(x)| \leq c_{28} \sum_{1 \leq |u| \leq y} |u|^{-4} = O(1)$$

oder

$$S(x) = T(x) + O(1). \tag{88}$$

Liegt der Gitterpunkt (u) im Bereich $1 \leq |u| \leq y$, so liegt der Würfel $\mathfrak{W}(u)$ gewiß ganz im Bereich

$$1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq |s| \leq y - \frac{\sqrt{3}}{2};$$

andererseits wird der Bereich

$$1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \leq |s| \leq y - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ganz von den Würfeln $\mathfrak{W}(u)$ überdeckt, deren Mittelpunkte der Bedingung $1 \leq |u| \leq y$ genügen. Folglich ist

$$I\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \leq T(x) \leq I\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

oder nach (87)

$$c_{27} \log \frac{y - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \leq T(x) \leq c_{27} \log \frac{y + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Mithin gilt

$$T(x) = c_{27} \log y + O(1)$$

und in Verbindung mit (88) unter Beachtung der Gleichung $2x^2 = y^4$

$$S(x) = \tfrac{1}{2} c_{27} \log x + O(1) = \tfrac{1}{2} \gamma_4 \log x + O(1). \tag{89}$$

Unter Verwendung dieser Gleichung findet man schließlich:

$$P_{2,2}(x) = 4 \alpha_3 \gamma_4 x^3 \log x + O(x^3). \tag{90}$$

Aus der Anzahl $P_{2,2}(x)$ gewinnen wir sogleich die Anzahl $P^*_{2,2}(x)$ der primitiven Formen mittels der Gleichung

$$P^*_{2,2}(x) = \frac{1}{4} \sum_{d_1 d_2 \leq x} \mu(d_1) \mu(d_2) P_{2,2}\left(\frac{x}{d_1 d_2}\right),$$

die man durch analoge Überlegungen wie die Gl. (40) erhält. Demnach gilt:

$$P^*_{2,2}(x) = \frac{1}{4}\sum_{d_1 d_2 \leq x} \mu(d_1)\mu(d_2)\left\{4\alpha_3\gamma_4 \frac{x^3}{d_1^3 d_2^3}\log\frac{x}{d_1 d_2} + O\left(\frac{x^3}{d_1^3 d_2^3}\right)\right\}$$

$$= \alpha_3\gamma_4 x^3 \log x \sum_{d_1 d_2 \leq x} \frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{d_1^3 d_2^3} -$$

$$- 2\alpha_3\gamma_4 x^3 \sum_{d_1 d_2 \leq x} \frac{\mu(d_1)\mu(d_2)}{d_1^3 d_2^3}\log d_1 + O\left(x^3 \sum_{d_1 d_2 \leq x} \frac{1}{d_1^3 d_2^3}\right)$$

$$= \alpha_3\gamma_4 x^3 \log x\left(\frac{1}{\zeta^2(3)} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) + O(x^3),$$

also

$$P^*_{2,2}(x) = \frac{\alpha_3\gamma_4}{\zeta^2(3)} x^3 \log x + O(x^3). \tag{91}$$

Nun ergibt sich auch rasch die Anzahl $R^*_{4,1}(x)$ der reduziblen (primitiven) Formen der Klasse $\mathfrak{R}^*_{m,1}(x)$; nach Satz 6 ist ja

$$R^*_{4,1}(x) = P^*_{1,3}(x) + \tfrac{1}{2} P^*_{2,2}(x) + O(x^3),$$

nach Satz 5

$$P^*_{1,3}(x) = \frac{\alpha_4\eta(4)}{4\zeta^2(4)} x^4 + O(x^3),$$

folglich nach Gl. (91)

$$R^*_{4,1}(x) = \frac{\alpha_4\eta(4)}{4\zeta^2(4)} x^4 + \frac{\alpha_3\gamma_4}{2\zeta^2(3)} x^3 \log x + O(x^3).$$

Damit ist die letzte noch fehlende Gleichung des Hauptsatzes 3 bewiesen.

VII.

Als letzte Aufgabe bleibt noch der Beweis des Hauptsatzes 4. Die Anzahl $K^*_m(x)$ der normierten primitiven Polynome

$$f(z, a) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$$

des Grades $m \geqq 2$, also der Klasse $\mathfrak{R}^*_m(x)$:

$$a_m > 0,$$
$$\text{g.g.T. } (a_0, a_1, \ldots, a_m) = 1,$$
$$a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2 \leq x^2$$

stimmt offensichtlich mit der Anzahl derjenigen primitiven Formen

$$f^*(z, a) = a_0 z_0^m + a_1 z_0^{m-1} z_1 + \cdots + a_m z_1^m$$

aus $\mathfrak{R}^*_{m,1}(x)$ überein, für die a_m der Leitkoeffizient ist. Da aber diejenigen primitiven Formen $f^*(z, a)$, die der Bedingung $a_m = 0$ genügen, offensichtlich die Gestalt

$$f^*(z, a) = z_0 g^*(z, a)$$

mit einer primitiven Form $g^*(z, a)$ aus der Klasse $\mathfrak{K}^*_{m-1,1}(x)$ besitzen, während umgekehrt jede Form $g^*(z, a)$ aus $\mathfrak{K}^*_{m-1,1}$ in

$$f^*(z, a) = z_0 g^*(z, a)$$

eine Form aus $\mathfrak{K}^*_{m,1}(x)$ mit $a_m = 0$ liefert, ist

$$K^*_m(x) = K^*_{m,1}(x) - K^*_{m-1,1}(x). \tag{92}$$

Hingegen ist ein Polynom $f(z, a)$ aus $\mathfrak{K}^*_m(x)$ dann und nur dann (im Körper der rationalen Zahlen) irreduzibel, wenn die entsprechende Form $f^*(z, a)$ aus $\mathfrak{K}^*_{m,1}(x)$ irreduzibel ist, insbesondere also einen von Null verschiedenen, demnach positiven Leitkoeffizienten a_m besitzt. Folglich stimmt die Anzahl $I^*_m(x)$ der irreduziblen Polynome aus $\mathfrak{K}^*_m(x)$ mit der Anzahl der irreduziblen Formen aus $\mathfrak{K}^*_{m,1}(x)$ überein:

$$I^*_m(x) = I^*_{m,1}(x). \tag{93}$$

Damit ergeben sich für die Anzahlen $K^*_m(x)$ aus dem Hauptsatz 3 die folgenden Werte:

$$K^*_3(x) = \frac{\alpha_4}{2\zeta(4)} x^4 - \frac{\alpha_3}{2\zeta(3)} x^3 + O(x^2 \log x),$$

$$K^*_m(x) = \frac{\alpha_{m+1}}{2\zeta(m+1)} x^{m+1} - \frac{\alpha_m}{2\zeta(m)} x^m + O(x^{m-1}) \quad \text{für} \quad m \geqq 4.$$

In ähnlicher Weise erhält man die Anzahl

$$K^*_2(x) = K^*_{2,1}(x) - K^*_{1,1}(x),$$

wenn man noch die Anzahl $K^*_{1,1}(x)$ der primitiven Linearformen

$$L(z, a) = a_0 z_0 + a_1 z_1$$

mit

$$a_1 > 0; \qquad (a_0, a_1) = 1; \qquad a_0^2 + a_1^2 \leqq x^2$$

bestimmt. Die Anzahl $K_{1,1}(x)$ aller Linearformen $L(z, a)$ mit einer Norm

$$0 < a_0^2 + a_1^2 \leqq x^2$$

wird leicht aus (9.1) entnommen:

$$K_{1,1}(x) = A_2(x) - 1 = \alpha_2 x^2 + O(x^{\frac{3}{2}}).$$

Hieraus erhält man, ganz analog den allgemeinen Betrachtungen:

$$\begin{aligned} K^*_{1,1}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{d \leqq x} \mu(d) K_{1,1}\left(\frac{x}{d}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{d \leqq x} \mu(d) \left\{ \alpha_2 \frac{x^2}{d^2} + O\left(\left(\frac{x}{d}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \right\} \\ &= \frac{\alpha_2}{2\zeta(2)} x^2 - \alpha_2 x^2 \sum_{d > x} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(x^{\frac{3}{2}} \sum_{d \leqq x} d^{-\frac{3}{2}}\right). \end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\sum_{d<x} \frac{\mu(d)}{d^2} = O\left(\int_x^{\infty} \frac{dt}{t^2}\right) = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\sum_{d<x} d^{-\frac{3}{2}} = O\left(\int_1^{x} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}\right) = O(x^{\frac{1}{2}}),$$

also

$$K_{1,1}^*(x) = \frac{\alpha_2}{2\zeta(2)} x^2 + O(x). \tag{94}$$

Damit erhalten wir

$$K_2^*(x) = K_{1,1}^*(x) - K_{1,1}^*(x)$$

$$= \frac{\alpha_3}{2\zeta(3)} x^3 + O(x^{\frac{3}{2}}) - \frac{\alpha_2}{2\zeta(2)} x^2 + O(x)$$

$$= \frac{\alpha_3}{2\zeta(3)} x^3 - \frac{\alpha_2}{2\zeta(2)} x^2 + O(x^{\frac{3}{2}})$$

in Übereinstimmung mit der Gl. (19.1) des Hauptsatzes 4.

Die Gleichungen für die Anzahlen $I_m^*(x)$ der irreduziblen Polynome können wegen (93) ungeändert aus Hauptsatz 3 übernommen werden.

Erlangen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 30. Juli 1952.)

THOSAR, Y. V.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 336—348 (1953)

Two Theorems on Operational Calculus.

By

YESHWANT V. THOSAR.

Introduction.

The object of this paper is to establish two new theorems of operational calculus and apply them to get new operational forms. We obtain a remarkable operational relation (5.4) in which the parabolic cylinder function occurs both in the "original" and the "image" function. Incidentally we obtain some new infinite integrals. Also WHITTAKER's well-known integral [*15*] for parabolic cylinder function of negative order is obtained by operational calculus (4.4).

We write

$$f(p) \doteqdot h(x) \quad \text{or} \quad h(x) \doteqdot f(p) \quad \text{if}$$

$$f(p) = p \int_0^\infty e^{-px} h(x)\, dx, \qquad R(p) > 0. \tag{1}$$

$h(x)$ is called the "original", and $f(p)$ its "image". We shall occasionally make use of the following rules given by VAN DER POL [*7*, p. 863]: If $f(p) \doteqdot h(x)$, then

$$f(ap) \doteqdot h\left(\frac{x}{a}\right), \qquad R(a) > 0 \tag{R 1}$$

$$\frac{p f(p+\alpha)}{p+\alpha} \doteqdot e^{-\alpha x} h(x) \tag{R 2}$$

$$e^{-\lambda p} f(p) \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{for } x < \lambda \\ h(x-\lambda) & \text{for } x > \lambda \end{cases} \quad \lambda > 0 \tag{R 3}$$

$$\frac{f(p)}{p} \doteqdot \int_0^x h(u)\, du \tag{R 4}$$

$$-p \frac{d}{dp} \frac{f(p)}{p} \doteqdot x\, h(x). \tag{R 5}$$

Theorem I. *If* $f(p) \doteqdot h(x)$ *and* $f(\sqrt{p}) \doteqdot \sqrt{x}\, F\left(\frac{1}{x}\right)$, *then* $F(p) \doteqdot \frac{h\left(2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\pi x}}$.

Proof: We know [*5*, p. 27—31] that if $f(p) \doteqdot h(x)$ then

$$f(\sqrt{p}) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4x}} h(s)\, ds.$$

Putting $s^2/4 = t$ we get

$$f(\sqrt{p}) \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{x}} \frac{h(2\sqrt{t})\,dt}{\sqrt{t}}.$$

i. e.

$$f(\sqrt{p}) \doteq \sqrt{x}\, F\left(\frac{1}{x}\right)$$

where

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t}{x}} h(2\sqrt{t})}{\sqrt{\pi t}}\, dt.$$

If in this equation we replace $1/x$ by p and t by x we get, by (1),

$$F(p) \doteq \frac{h(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}}$$ q. e. d.

The theorem can also be stated in two ways as follows:

(i) *If* $h(x) \doteq f(p)$ *and* $\frac{h(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}} \doteq F(p)$ *then* $\sqrt{x}\, F\left(\frac{1}{x}\right) \doteq f(\sqrt{p})$.

(ii) *If* $F(p) \doteq \frac{h(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}}$ *and* $\sqrt{x}\, F\left(\frac{1}{x}\right) \doteq f(\sqrt{p})$ *then* $f(p) \doteq h(x)$.

Example 1. Let

$$f(p) = \frac{p^2}{p^2+1} \doteq \cos x = h(x)$$

and

$$f(\sqrt{p}) = \frac{p}{p+1} \doteq e^{-x} = \sqrt{x}\, F\left(\frac{1}{x}\right).$$

Then by Theorem I, since

$$F(p) \doteq \frac{h(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}}$$

we get

$$\sqrt{p}\, e^{-\frac{1}{p}} \doteq \frac{\cos(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}}. \tag{1.1}$$

Now take

$$f(p) = \frac{2p^2}{(p^2+1)^2} \doteq x \sin x = h(x)$$

which is obtained by applying (R 5) to

$$\frac{p}{p^2+1} \doteq \sin x,$$

and take

$$f(\sqrt{p}) = \frac{2p}{(p+1)^2} \doteq 2x e^{-x} = \sqrt{x}\, F\left(\frac{1}{x}\right)$$

which is obtained by applying (R 2) to

$$\frac{1}{p} \doteq x.$$

Then we have, by Theorem I,

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\, e^{-\frac{1}{p}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left(2\sqrt{x}\right) \tag{1.2}$$

(1.1) and (1.2) can also be obtained by putting $n = -\frac{1}{2}$ and $n = \frac{1}{2}$ respectively in

$$p^{-n} e^{-\frac{1}{p}} \doteq x^{n/2} J_n\left(2\sqrt{x}\right), \qquad R(n) > -1.$$

Example 2. We have, due to HOWELL [4],

$$h(x) = \sqrt{\pi}\, I_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{4}\right) \doteq (-)^{-n}\Gamma(n+1)\, 2^{\frac{1}{2}}\, p\, D_{-n-1}\left(p\sqrt{2}\right) D_{-n-1}\left(-p\sqrt{2}\right) = f(p)$$

where $R(n) > -1$, and

$$\frac{h\left(2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\pi x}} = \frac{I_{n+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{x}} \doteq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, p\, Q_n(p) = F(p).$$

By Theorem I

$$(-)^{-n}\Gamma(n+1)\sqrt{p}\, D_{-n-1}\left(\sqrt{2p}\right) D_{-n-1}\left(-\sqrt{2p}\right) \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\, Q_n\left(\frac{1}{x}\right), \tag{2.1}$$

$$R(n) > -1.$$

Using (R 1) with (2.1) we get

$$(-)^{-n}\Gamma(n+1)\sqrt{p}\, D_{-n-1}\left(\sqrt{2ap}\right) D_{-n-1}\left(-\sqrt{2ap}\right) \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\, Q_n\left(\frac{a}{x}\right) \tag{2.2}$$

where $R(n) > -1$, $R(a) > 0$.

Hence, by (1), we have

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}}{\sqrt{x}}\, Q_n\left(\frac{a}{x}\right) dx = (-)^{-n}\Gamma(n+1)\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, D_{-n-1}\left(\sqrt{2ap}\right) D_{-n-1}\left(-\sqrt{2ap}\right) \tag{2.3}$$

valid for $R(n) > -1$, $R(p) > 0$, $R(a) > 0$.

Example 3. Again, due to HOWELL [4],

$$\frac{h\left(2\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\pi x}} = \frac{D_n\left(2\sqrt{x}\right) D_n\left(2i\sqrt{x}\right)}{\sqrt{\pi x}} \doteq i^n n!\sqrt{p}\, P_n\left(\frac{2}{p}\right) = F(p).$$

Further

$$\sqrt{x}\, F\left(\frac{1}{x}\right) = i^n n!\, P_n(2x) \doteq i^n n!\,(-)^n \sqrt{\frac{\pi p}{2}}\, I_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{p}{2}\right) = f\left(\sqrt{p}\right).$$

By Theorem I,

$$D_n(x)\, D_n(ix) \doteq i^{-n} n!\sqrt{\pi}\, \frac{p}{2}\, I_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{p^2}{2}\right) \tag{3.1}$$

where n is a positive integer.

Hence, by (R 1), we get

$$D_n(ax)\, D_n(iax) \doteq i^{-n} n!\sqrt{\pi}\, \frac{p}{2a}\, I_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{p^2}{2a^2}\right) \tag{3.2}$$

n being a positive integer and $R(a) > 0$.

By (1), we have

$$\int_0^\infty e^{-p x} D_n(a x)\, D_n(i a x)\, d x = i^{-n} n!\, \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\, I_{-(n+\frac{1}{2})}\left(\frac{p^2}{2a^2}\right) \tag{3.3}$$

valid for $R(a) > 0$, $R(p) > 0$.

Example 4. We have, due to VARMA [*11*, p. 26]

$$f(\sqrt{p}) = \frac{\sqrt{p}}{(1+\sqrt{p})^n} \div \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, (2x)^{\frac{1}{2}(n-1)}\, e^{\frac{1}{2}x}\, D_{-n}(\sqrt{2x}) = \sqrt{x}\, F\left(\frac{1}{x}\right)$$

where $R(n) > -1$.

It can be easily seen that

$$f(p) = \frac{p}{(1+p)^n} \div \frac{e^{-x} x^{n-1}}{\Gamma(n)} = h(x), \qquad R(n) > 0.$$

By Theorem I, we get

$$\frac{e^{\frac{1}{2p}}}{p^{\frac{n-2}{2}}}\, D_{-n}\left(\sqrt{\frac{2}{p}}\right) \div \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(n)}\, x^{\frac{n-2}{2}}\, e^{-2\sqrt{x}}, \qquad R(n) > 0. \tag{4.1}$$

Applying (R 1) to (4.1) we have

$$\frac{e^{\frac{a}{4p}}}{p^{\frac{n-2}{2}}}\, D_{-n}\left(\sqrt{\frac{a}{p}}\right) \div \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(n)}\, x^{\frac{n-2}{2}}\, e^{-\sqrt{2ax}} \tag{4.2}$$

where $R(n) > 0$, $R(a) > 0$.

Hence, by (1),

$$\int_0^\infty e^{-px-\sqrt{2ax}}\, x^{\frac{n-2}{2}}\, d x = \frac{\Gamma(n)}{2^{\frac{n-2}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{a}{4p}}}{p^{n/2}}\, D_{-n}\left(\sqrt{\frac{a}{p}}\right)$$

valid for $R(a) > 0$, $R(p) > 0$, $R(n) > 0$.

In this equation, writing $p^2/2$ for p, $a^2/2$ for a, and x^2 for x we get the integral

$$\int_0^\infty e^{-\frac{p^2 x^2}{2} - ax}\, x^{n-1}\, d x = \frac{\Gamma(n)}{p^n} \cdot e^{\frac{a^2}{4p^2}}\, D_{-n}\left(\frac{a}{p}\right) \tag{4.3}$$

valid for $R(a) > 0$, $R(p) > 0$, $R(n) > 0$.

If in (4.3) we put $p = 1$, $a = x$ and $x = t$ we get

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2 - tx}\, t^{n-1}\, d t = \Gamma(n)\, e^{x^2/4} D_{-n}(x), \qquad R(n) > 0 \tag{4.4}$$

which is the well known WHITTAKER'S integral for parabolic cylinder function of negative order [*15*].

If in (4.3) we put $a = 1$, $p = x$ and $x = t$ we get

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2 t^2 - t}\, t^{n-1}\, d t = \Gamma(n)\, \frac{e^{\frac{1}{4x^2}}}{x^n}\, D_{-n}\left(\frac{1}{x}\right), \qquad R(n) > 0. \tag{4.5}$$

Putting $1/x$ for x in (4.5) and then comparing it with (4.4) we have

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{x^2}-t} t^{n-1}\,dt = x^n \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2-tx} t^{n-1}\,dt \tag{4.6}$$

where $R(n)>0$ and $0<R(x)<\infty$.

Example 5. Again, due to VARMA [12, p. 30]

$$\frac{h(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}} = x^{-\frac{1}{2}} D_{2n}(2\sqrt{x}) \doteqdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}\cdot\frac{(2n)!}{n!}\cdot\frac{p(1-p)^n}{(1+p)^{n+\frac{1}{2}}} = F(p).$$

Further due to SHASTRI [8],

$$\sqrt{p}\, e^{p/4} D_{-2n-1}(\sqrt{p}) \doteqdot \frac{1}{\Gamma(n+1)}\cdot\frac{x^n}{(2x+1)^{n+\frac{1}{2}}}, \qquad R(n) > -\frac{1}{2}.$$

Applying to this first (R 3) and then (R 1), we get after a little simplification,

$$\sqrt{p}\, D_{-2n-1}(2\sqrt{p}) \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{for } x<1 \\ \dfrac{1}{\Gamma(n+1)}\cdot\dfrac{(x-1)^n}{(x-1)^{n-\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{1}{2^{n+\frac{1}{2}}} & \text{for } x>1 \end{cases} \tag{5.1}$$

where $R(n) > -\frac{1}{2}$.

Now,

$$\sqrt{x}\, F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}\cdot\frac{(2n)!}{n!}\cdot\frac{(x-1)^n}{(x-1)^{n-\frac{1}{2}}}$$

$$\doteqdot \sqrt{\pi}\,(2n)!\,\sqrt{2p}\, D_{-2n-1}(2\sqrt{p}) = f(\sqrt{p})$$

by (5.1), this being true when $x>1$ and n is a positive integer. By Theorem I we get the interesting result

$$(2n)!\, 2^{\frac{1}{2}} p\, D_{-2n-1}(2p) \doteqdot D_{2n}(x), \qquad x>1 \tag{5.2}$$

n being a positive integer.

In (5.2), changing $2n$ into n, we have

$$n!\, 2^{\frac{1}{2}} p\, D_{-n-1}(2p) \doteqdot D_n(x), \qquad x>1 \tag{5.3}$$

which by (R 1) becomes

$$n!\, 2^{\frac{1}{2}} a^n p\, D_{-n-1}(2ap) \doteqdot D_n\left(\frac{x}{a}\right) \tag{5.4}$$

valid for a real, $x>a>0$ and n a positive integer or zero.

Thus we get an operational relation connecting the parabolic cylinder function of positive order with one of negative order. This relation would be useful to get properties of parabolic cylinder functions of negative order from the known properties of the parabolic cylinder functions of positive order and viceversa.

Applying (R 4) to (5.4) we get

$$n!\, 2^{\frac{1}{2}} a\, D_{-n-1}(2ap) \doteqdot \int_a^x D_n\left(\frac{u}{a}\right) du \tag{5.5}$$

valid for a real, $x > a > 0$ and n a positive integer or zero. From (5.1) we get

$$(5.6)\qquad \int_1^\infty e^{-px}(x-1)^{\frac{m-1}{2}}(x+1)^{-\frac{m}{2}}\,dx = 2^{m/2}\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\frac{D_{-m}(2\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$$

valid for $R(m) > 0$, $R(p) > 0$.

Example 6. We know that

$$\frac{h(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}} = 2x^{-k-\frac{1}{2}}K_{2m}(2\sqrt{x}) \div \Gamma\left(\tfrac{1}{2}+m-k\right)\Gamma\left(\tfrac{1}{2}-m-k\right)e^{\frac{1}{2p}}p^{k+1}W_{k,m}\left(\frac{1}{p}\right)$$
$$\div F(p)$$

where K_n is the modified BESSEL function of the second kind (9, result (3.2)).

Putting $l = -k + \frac{1}{2}$ in the following result due to DHAR (1, formula (35))

$$x^{l-1}e^{x/2}W_{k,m}(x) \div \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+m+k)\,\Gamma(\frac{1}{2}-m+k)}{\Gamma(k-l+1)}\,p^{\frac{1}{2}-m-k}(1-p)^{k-l}$$
$$\times {}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}+m+k,\ \tfrac{1}{2}-l+m;\ k-l+1;\ 1-\frac{1}{p}\right)$$

we get,

$$(6.1)\qquad \begin{cases} \sqrt{x}\,F\left(\frac{1}{x}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+m-k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-m-k\right)x^{-k-\frac{1}{2}}e^{x/2}W_{k,m}(x) \\ \quad \div \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+m+k)\,\Gamma(\frac{1}{2}-m-k)\,\Gamma(\frac{1}{2}-m+k)\,\Gamma(\frac{1}{2}+m-k)}{\Gamma(2k+\frac{1}{2})} \times \\ \quad \times p^{\frac{1}{2}-m-k}(1-p)^{2k-\frac{1}{2}}{}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}+m+k,\ k+m;\ 2k+\tfrac{1}{2};\ 1-\frac{1}{p}\right) \\ \quad = f(\sqrt{p}) \end{cases}$$

valid for $R(2k+\frac{1}{2}) > 0$. By Theorem I we get

$$(6.2)\qquad \begin{cases} x^{-2k}K_{2m}(x) \div \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2^{2k-1}\sin(m+k+\frac{1}{2})\pi\sin(\frac{1}{2}-m+k)\pi}\cdot\frac{p^{1-2m-2k}}{\Gamma(2k-\frac{1}{2})} \\ \quad \times (1-p^2)^{2k-\frac{1}{2}}{}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}+m+k,\ k+m;\ 2k+\tfrac{1}{2};\ 1-\frac{1}{p^2}\right) \end{cases}$$

valid for $R(2k+\frac{1}{2}) > 0$, $0 < R(m+k+\frac{1}{2}) < 1$, $0 < R(\frac{1}{2}-m+k) < 1$.

In (6.2) if we put $k = \frac{1}{4}$, $2m - \frac{1}{2} = n$ and make use of (3, p. 23, formula (21))

$$P_n(\cos\Theta) = \cos^{-n-1}\Theta\,{}_2F_1\left(-\frac{n+1}{2},\ 1+\frac{n}{2};\ 1;\ -\tan^2\Theta\right)$$

(since $P_n = P_{-n-1}$) we get after some simplification

$$(6.3)\qquad \frac{K_{n+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{2\pi x}} \div -\frac{\pi}{2\sin n\pi}\,p\,P_n(p).$$

From (6.2) and (6.3) we get the integrals

$$(6.4)\qquad \begin{cases} \int_0^\infty e^{-px}x^{-2k}K_{2m}(x)\,dx \\ \quad = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}p^{-2m-2k}(1-p^2)^{2k-\frac{1}{2}}}{2^{2k-1}\sin(m+k+\frac{1}{2})\pi\sin(\frac{1}{2}-m+k)\pi\,\Gamma(2k+\frac{1}{2})} \\ \quad \times {}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}+m+k,\ k+m;\ 2k+\tfrac{1}{2};\ 1-\frac{1}{p^2}\right) \end{cases}$$

valid for $R(2k+\frac{1}{2})>0$, $R(p)>0$, $0<R(m+k+\frac{1}{2})<1$, $0<R(\frac{1}{2}-m+k)<1$, and

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}}{\sqrt{x}} K_{n+\frac{1}{2}}(x)\,dx = -\frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}\sin n\pi} P_n(p) \tag{6.5}$$

valid for $R(p)>0$, $0<R(n)<1$. It may be pointed out that (6.3) can also be obtained by using

$$K_n(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} W_{0,n}(2x)$$

along with the DHAR's result [*1*, formula (53)]

$$(2x)^{-1} W_{0,n+\frac{1}{2}}(2x) \doteqdot -\frac{\pi}{2\sin n\pi}\, p\, P_n(p).$$

Example 7. We know [*9*, result (1.4)] that

$$\sqrt{x}\, F\left(\frac{1}{x}\right) = x^{s-1} e^{-\frac{1}{x}} \doteqdot 2p^{1-\frac{s}{2}} K_s(2\sqrt{p}) = f(\sqrt{p}\ .$$

Further

$$F(p) = \frac{e^{-p}}{p^{s-\frac{1}{2}}} \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x<1 \\ \dfrac{(x-1)^{s-\frac{3}{2}}}{\Gamma(s-\frac{1}{2})} & \text{for} \quad x>1, \qquad R(s)>\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$= \frac{h(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}},$$

By Theorem I,

$$2p^{2-s} K_s(2p) \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x<2 \\ \dfrac{\sqrt{\pi}\cdot x\,(x^2-4)^{s-\frac{3}{2}}}{2^{2s-2}\Gamma(s-\frac{1}{2})} & \text{for} \quad x>2, \qquad R(s)>\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

which by (R 1) can be written as

$$p^{2-s} K_s(p) \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x<1 \\ \dfrac{\sqrt{\pi}\, x\,(x^2-1)^{s-\frac{3}{2}}}{2^{s-1}\Gamma(s-\frac{1}{2})} & \text{for} \quad x>1, \qquad R(s)>\dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{7.1}$$

and also as

$$p^{2-s} K_s(ap) \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x<a \\ \dfrac{\sqrt{\pi}\, x\,(x^2-a^2)^{s-\frac{3}{2}}}{2^{s-1}\Gamma(s-\frac{1}{2})\, a^s} & \text{for} \quad x>a, \end{cases} \tag{7.2}$$

a being real and positive, $R(s)>\frac{1}{2}$. Applying (R 4) to (7.1) we have

$$p^{1-s} K_s(p) \doteqdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^s \Gamma(s+\frac{1}{2})} (x^2-1)^{s-\frac{1}{2}} \tag{7.3}$$

valid for $x>1$, $R(s)>+\frac{1}{2}$. From (7.2) we get

$$\frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right) a^s\, p^{1-s} K_s(ap) = \int_a^\infty e^{-px}\, x\,(x^2-a^2)^{s-\frac{3}{2}}\, dx \tag{7.4}$$

valid for a real and positive, $R(p) > 0$, $R(s) > \frac{1}{2}$. This is an integral representation for the K_n function.

Example 8. We have, due to ERDELYI [2],

$$\frac{h(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}} = \frac{H_{2n}(\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}} \doteqdot (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \frac{(p-1)^n}{p^{n-\frac{1}{2}}} = F(p).$$

Further

$$\sqrt{x}\, F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(2n)!}{n!}(x-1)^n \doteqdot (2n)!\, \frac{e^{-p}}{p^n} = f(\sqrt{p})$$

valid for $x > 1$. By Theorem I,

$$H_{2n}\left(\frac{x}{2}\right) \doteqdot (2n)!\, \frac{e^{-p^2}}{p^{2n}}, \qquad x > 1 \tag{8.1}$$

which by (R 1) takes the form

$$H_n\left(\frac{x}{a}\right) \doteqdot \frac{2^n n!}{a^n} \cdot \frac{e^{-\frac{a^2 p^2}{4}}}{p^n}, \qquad x > \frac{a}{2} > 0 \tag{8.2}$$

a being real. Again, take [5, p. 27–31]

$$\frac{h(2\sqrt{x})}{\sqrt{\pi x}} = H_{2n+1}(\sqrt{x}) \doteqdot \frac{(2n+1)!}{n!} \sqrt{\frac{\pi}{p}} \left(\frac{1}{p} - 1\right)^n = F(p),$$

and

$$\sqrt{x}\, F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{(2n-1)!}{n!} \sqrt{\pi} \cdot x(x-1)^n \doteqdot (2n+1)! \sqrt{\pi}\, e^{-p} \frac{(p+n+1)}{p^{n+1}}, \qquad x > 1$$
$$= f(\sqrt{p})$$

which is obtained by applying first (R 3) and then (R 5) to the operational relation

$$\frac{1}{p^n} \doteqdot \frac{x^n}{n!}.$$

By Theorem I we get

$$\frac{x}{2} H_{2n+1}\left(\frac{x}{2}\right) \doteqdot \frac{(2n+1)!\, e^{-p^2}(p^2+n+1)}{p^{2n+2}} \tag{8.3}$$

which by (R 1) becomes

$$x H_n\left(\frac{x}{a}\right) \doteqdot \frac{2^{n+1} n!}{a^n} \cdot \frac{e^{-\frac{a^2 p^2}{4}} \cdot \left(\frac{a^2 p^2}{4} + \frac{n+1}{2}\right)}{p^{n+1}} \tag{8.4}$$

valid for a real, $x > \frac{a}{2} > 0$, n being a positive integer.

Theorem II. *If* $h(x) \doteqdot f(p)$ *and* $h(x^2) \doteqdot \frac{F(p^2/4)}{p/2}$ *then*

$$F(p) \doteqdot \frac{f(1/x)}{\sqrt{\pi x}}.$$

Proof: We know that [5, p. 27–31] if $h(x) \doteqdot f(p)$ then

$$h(x^2) \doteqdot \frac{p}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{p^2 s^2}{4}} f\left(\frac{1}{s^2}\right) ds.$$

Let $s^2 = t$. Then

$$h(x^2) \doteqdot \frac{p}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{p^2}{4}t} f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{F(p^2/4)}{p/2}$$

where

$$F\left(\frac{p^2}{4}\right) = \frac{p^2}{4} \int_0^\infty e^{-p^2 \frac{t}{4}} \frac{f(1/t)}{\sqrt{\pi t}}\, dt.$$

$\therefore$ By (1),

$$F(p) \doteqdot \frac{f(1/x)}{\sqrt{\pi x}} \quad \text{q. e. d.}$$

The theorem can also be stated in the following two ways:

(i) *If* $F(p) \doteqdot \frac{f(1/x)}{\sqrt{\pi x}}$ *and* $\frac{F(p^2/4)}{p/2} \doteqdot h(x^2)$ *then* $f(p) \doteqdot h(x)$.

(ii) *If* $f(p) \doteqdot h(x)$ *and* $\frac{1}{\sqrt{\pi x}} f\left(\frac{1}{x}\right) \doteqdot F(p)$ *then* $\frac{F(p^2/4)}{p/2} \doteqdot h(x^2)$.

Example 9. We have, due to MITRA [6, p. 83],

$$h(x^2) = J_\nu(a x)\, J_\nu(b x) \doteqdot \frac{p}{\pi\sqrt{a b}}\, Q_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{p^2 + a^2 + b^2}{2 a b}\right) = \frac{F(p^2/4)}{p/2}$$

and

$$h(x) = J_\nu(a\sqrt{x})\, J_\nu(b\sqrt{x}) \doteqdot e^{-\left(\frac{a^2+b^2}{4p}\right)} I_\nu\left(\frac{a b}{2p}\right) = f(p).$$

By Theorem II,

$$F(p) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{\pi x}} f\left(\frac{1}{x}\right)$$

i.e.

$$\frac{2p}{\sqrt{a b}}\, Q_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{4p + a^2 + b^2}{2 a b}\right) \doteqdot \sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{-\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right)x} I_\nu\left(\frac{a b}{2} x\right). \tag{9.1}$$

In (9.1) putting, respectively, $b = a$ and $b = a = \sqrt{2}$, we get

$$\frac{2p}{a}\, Q_{\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{2p + a^2}{a^2}\right) \doteqdot \sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{-\frac{a^2}{2}x} I_\nu\left(\frac{a^2 x}{2}\right) \tag{9.2}$$

$$p\, Q_{\nu-\frac{1}{2}}(p + 1) \doteqdot \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} I_\nu(x). \tag{9.3}$$

Applying (R 2) to (9.3) we get,

$$p\, Q_{\nu-\frac{1}{2}}(p) \doteqdot \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, I_\nu(x) \tag{9.4}$$

which is a well known operational relation.

Example 10. We know that [4]

$$h(x^2) = J_{n-\frac{1}{2}}(x^2) \doteqdot \frac{\Gamma(n-1)}{\sqrt{2\pi}}\, p\, D_{n-1}\left(p\, e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{2}\right) D_{n-1}\left(p\, e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{2}\right) = \frac{F(p^2/4)}{p/2}$$

valid for $R(n) > -1$; further

$$h(x) = J_{n+\frac{1}{2}}(x) \doteqdot \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \left(\sqrt{p^2+1} - p\right)^{n+\frac{1}{2}} = f(p).$$

By Theorem II,

$$\Gamma(n+1)\,2^{\frac{1}{2}}\,p\,D_{-n-1}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{2p}\right)D_{-n-1}\left(e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{2p}\right) \doteq \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)^{n+\frac{1}{2}}}{x^{n+1}\sqrt{1+x^2}} \tag{10.1}$$

valid for $R(n) > -1$. This, by (R 1), becomes

$$\left\{\begin{aligned}&\Gamma(n+1)\left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} p\,D_{-n-1}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{2ap}\right)D_{-n-1}\left(e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{2ap}\right)\\ &\qquad\doteq \frac{(\sqrt{x^2+a^2}-a)^{n+\frac{1}{2}}}{x^{n+1}\sqrt{x^2+a^2}}, \quad R(n)>-1, \quad R(a)>0.\end{aligned}\right. \tag{10.2}$$

Hence, by (1), we have

$$\left\{\begin{aligned}&\Gamma(n+1)\left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}} D_{-n-1}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\sqrt{2ap}\right)D_{-n-1}\left(e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{2ap}\right)\\ &\qquad=\int_0^\infty \frac{e^{-px}(\sqrt{x^2+a^2}-a)^{n+\frac{1}{2}}}{x^{n+1}\sqrt{x^2+a^2}}\,dx\end{aligned}\right. \tag{10.3}$$

$$= \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-ap\tan\vartheta}\left(\frac{1-\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right)^{n+\frac{1}{2}}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta\cos\vartheta}} \tag{10.4}$$

both integrals being valid for $R(a)>0$, $R(p)>0$, $R(n)>-1$.

Similarly, taking

$$h(x^2) = I_{n+\frac{1}{2}}(x^2) \doteq \frac{\Gamma(n+1)}{(-)^n}\cdot\frac{p}{\sqrt{2\pi}}D_{-n-1}\left(\frac{p}{\sqrt{2}}\right)D_{-n-1}\left(-\frac{p}{\sqrt{2}}\right) = \frac{F(p^2/4)}{p/2}$$

and

$$h(x) = I_{n+\frac{1}{2}}(x) \doteq \frac{p}{\sqrt{p^2-1}}\left\{p-\sqrt{p^2-1}\right\}^{n+\frac{1}{2}} = f(p)$$

we get, by Theorem II, the new operational form

$$\left\{\begin{aligned}&(-)^{-n}\Gamma(n+1)\,2^{\frac{1}{2}}p\,D_{-n-1}\left(\sqrt{2p}\right)D_{-n-1}\left(-\sqrt{2p}\right)\\ &\qquad\doteq\frac{\{1-\sqrt{1-x^2}\}^{n+\frac{1}{2}}}{x^{n+1}\sqrt{1-x^2}}, \quad R(n)>-1;\end{aligned}\right. \tag{10.5}$$

which by (R 1) becomes

$$\left\{\begin{aligned}&(-)^{-n}\Gamma(n+1)\left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}p\,D_{-n-1}\left(\sqrt{2ap}\right)D_{-n-1}\left(-\sqrt{2ap}\right)\\ &\qquad\doteq\frac{\{a-\sqrt{a^2-x^2}\}^{n+\frac{1}{2}}}{x^{n+1}\sqrt{a^2-x^2}}, \quad R(n)>-1, \quad R(a)>0.\end{aligned}\right. \tag{10.6}$$

Hence we get

$$\left\{\begin{aligned}&(-)^{-n}\Gamma(n+1)\left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{2}}D_{-n-1}\left(\sqrt{2ap}\right)D_{-n-1}\left(-\sqrt{2ap}\right)\\ &\qquad=\int_0^\infty e^{-px}\frac{\{a-\sqrt{a^2-x^2}\}^{n+\frac{1}{2}}}{x^{n+1}\sqrt{a^2-x^2}}\,dx\end{aligned}\right. \tag{10.7}$$

where $R(a)>0$, $R(p)>0$, $R(n)>-1$.

Example 11. Take [13]

$$\frac{F(p^2/4)}{p/2} = \Gamma(m)\, p\, e^{p^2/4} D_{-m}(p) \doteqdot x^{m-1} e^{-\frac{x^2}{2}} = h(x^2)$$

where $R(m) > 0$, and

$$h(x) = x^{\frac{m-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} = \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \frac{p}{(p+\frac{1}{2})^{\frac{m+1}{2}}} = f(p).$$

Applying Theorem II we get, after using the duplication formula of the Gamma function [16, p. 240] and (R 1),

$$(11.1) \qquad 2^{m/2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) p\, e^{p/2} D_{-m}(\sqrt{2p}) \doteqdot \frac{x^{\frac{m-2}{2}}}{(1+x)^{\frac{m+1}{2}}}, \qquad R(m) > 0$$

and also

$$(11.2) \qquad \frac{2^{m/2}}{\sqrt{a}} \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) p\, e^{\frac{ap}{2}} D_{-m}(\sqrt{2ap}) \doteqdot \frac{x^{\frac{m-2}{2}}}{(a+x)^{\frac{m+1}{2}}}, \qquad R(m) > 0$$

where $R(a) > 0$. Hence, by (1),

$$(11.3) \qquad \frac{2^{m/2}}{\sqrt{a}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) e^{\frac{ap}{2}} D_{-m}(\sqrt{2ap}) = \int_0^\infty e^{-px} \frac{x^{\frac{m-2}{2}}}{(x+a)^{\frac{m+1}{2}}}\, dx$$

valid for $R(a) > 0$, $R(p) > 0$, $R(m) > 0$. Applying to (11.1) first (R 3) and then (R 1), we get

$$(11.4) \qquad 2^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) p\, D_{-m}(2\sqrt{p}) \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1; \\ \dfrac{(x-1)^{\frac{m-2}{2}}}{(x+1)^{\frac{m+1}{2}}} & \text{for } x > 1, \end{cases} \qquad R(m) > 0$$

and also

$$(11.5) \qquad \frac{2^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{a}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) p\, D_{-m}(2\sqrt{ap}) \doteqdot \begin{cases} 0 & \text{for } x < a \\ \dfrac{(x-a)^{\frac{m-2}{2}}}{(x+a)^{\frac{m+1}{2}}} & \text{for } x > a \end{cases}$$

valid for a real and positive, $R(m) > 0$. Hence by (1)

$$(11.6) \qquad \frac{2^{\frac{m-1}{2}}}{\sqrt{a}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) D_{-m}(2\sqrt{ap}) = \int_a^\infty e^{-px} \frac{(x-a)^{\frac{m-2}{2}}}{(x+a)^{\frac{m+1}{2}}}\, dx$$

valid for a real and positive, $R(p) > 0$, $R(m) > 0$.

Example 12. By (4.1) above,

$$h(x) = \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma n} x^{\frac{n-2}{2}} e^{-2\sqrt{x}} \doteqdot \frac{e^{\frac{2}{p}}}{p^{n-2}} D_{-n}\left(\sqrt{\frac{2}{p}}\right) = f(p), \qquad R(n) > 0,$$

and we easily get

$$h(x^2) = \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(n)} x^{n-2} e^{-2x} \doteq \frac{2^{\frac{n-2}{2}}}{(n-1)} \cdot \frac{p}{(p+2)^{n-1}} \doteq \frac{F(p^2/4)}{p/2}.$$

By Theorem II we get the new operational form

$$(12.1) \qquad \frac{p}{(\sqrt{p+1})^{n-1}} \doteq \frac{2^{\frac{n-2}{2}}(n-1)}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{n-3}{2}} e^{\frac{x}{2}} D_{-n}(\sqrt{2x}), \qquad R(n) > 0.$$

(12.1) can also be obtained by applying the rule [5]

$$p \int_p^\infty \frac{f(w)}{w} dw \doteq \frac{h(x)}{x} \qquad \text{if} \qquad f(p) \doteq h(x),$$

to the known operational form [11]

$$\frac{\sqrt{p}}{(1+\sqrt{p})^n} \doteq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (2x)^{\frac{1}{2}(n-1)} e^{x/2} D_{-n}(\sqrt{2x}).$$

Now applying (R 2) to (12.1), we get

$$(12.2) \qquad \frac{p}{\{\sqrt{(p+\frac{1}{2})}+1\}^{n-1}} \doteq \frac{2^{\frac{n-2}{2}}(n-1)}{\sqrt{\pi}} x^{\frac{n-3}{2}} D_{-n}(\sqrt{2x}), \qquad R(n) > 0.$$

Hence, by (1),

$$(12.3) \qquad \int_0^\infty e^{-px} x^{\frac{n-3}{2}} D_{-n}(\sqrt{2x})\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{n-2}{2}}(n-1)\{\sqrt{(p+\frac{1}{2})}+1\}^{n-1}}$$

valid for $R(p) > 0$, $R(n) > 0$.

Example 13. From the known integral [14, p. 393] $\int_0^\infty J_\nu(at)\, t^{\mu-1} e^{-p^2t^2} dt$ in terms of ${}_1F_1$ and the formula

$$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)} {}_1F_1(-n; \alpha+1; x) = L_n^{(\alpha)}(x),$$

we get

$$(13.1) \qquad J_\alpha(2\sqrt{ax})(ax)^{\frac{n+\alpha}{2}} \doteq \Gamma(n+1)\left(\frac{a}{p}\right)^{n+\alpha} e^{-\frac{a}{p}} L_n^{(\alpha)}\left(\frac{a}{p}\right)$$

valid for $R(n+1) > 0$, $R(\alpha+1) > 0$, $R(a) > 0$.

In (13.1) let us take both α and n as positive integers, put $\alpha = m$, and take

$$h(x) = x^{\frac{n+m}{2}} J_m(2\sqrt{x}) \doteq n!\, \frac{e^{-\frac{1}{p}}}{p^{n+m}} L_n^{(m)}\left(\frac{1}{p}\right) = f(p).$$

Then [5] $h(x^2) = x^{2n+m} J_m(2x)$

$$\doteq \frac{(-1)^m (2n)!\, p}{(p^2+4)^{\frac{2n+m+1}{2}}} P_{2n+m}^m\left(\frac{p}{\sqrt{p^2+4}}\right)$$

$$= \frac{F(p^2/4)}{p/2}.$$

By Theorem II, we get the new operational form

$$(13.2)\quad \frac{\sqrt{\pi}}{n!}\cdot\frac{(-1)^m(2n)!}{2^{2n+m}}\cdot\frac{p}{(p+1)^{\frac{2n+m+1}{2}}}P^m_{2n+m}\left(\sqrt{\frac{p}{p+1}}\right)\doteqdot e^{-x}x^{n+m-\frac{1}{2}}L_n^{(m)}(x)$$

where n and m are both positive integers. Applying (R 2) to (13.2),

$$(13.3)\quad \frac{(-1)^m(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+m}n!}\cdot\frac{1}{p^{\frac{2n+m-1}{2}}}P^m_{2n+m}\left(\sqrt{1-\frac{1}{p}}\right)\doteqdot x^{n+m-\frac{1}{2}}L_n^{(m)}(x).$$

Hence, by (1),

$$(13.4)\quad \frac{(-1)^m(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+m}n!}\cdot\frac{1}{p^{\frac{2n+m+1}{2}}}P^m_{2n+m}\left(\sqrt{1-\frac{1}{p}}\right)=\int_0^\infty e^{-px}x^{n+m-\frac{1}{2}}L_n^{(m)}(x)\,dx$$

valid for $R(p)>0$, both n, m being positive integers.

The known operational form due to SHASTRI [*10*] viz.

$$x^{n-\frac{3}{2}}k_{2n}(x)\doteqdot(-)^n\frac{(2n-2)!}{n!}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-\frac{3}{2}}}\cdot\frac{p}{(p+1)^n}P^1_{2n-1}\left[\sqrt{\frac{p-1}{p+1}}\right]$$

where k_n is BATEMAN'S function, is a particular case of (13.3). This can be easily seen if we put $m=1$ in (13.3), use

$$L_n^{(1)}(x)=(-)^n(n+1)\frac{e^{x/2}}{x}k_{2n+2}\left(\frac{x}{2}\right)$$

and then apply (R 2) and (R 1).

References.

[*1*] DHAR, S. C.: Phil. Mag. (7) **21**, 1082—1096 (1936). — [*2*] ERDÉLYI, A.: Math. Z. **42**, 125—143 (1937). — [*3*] HOBSON, E. W.: Spherical an Ellipsoidal Harmonics. 1931. — [*4*] HOWELL, W. R.: Phil. Mag. **24**, 1082—1093 (1937). — [*5*] HUMBERT, P.: Le Calcul Symbolique. 1934. — [*6*] MITRA, S. C.: Bull. Calcutta Math. Soc. **25**, 81—98 (1933). — [*7*] POL, B. VAN DER: Phil. Mag. (7) **8**, 861—898 (1929). — [*8*] SHASTRI, N. A.: Math. Z. **44**, 789—793 (1939). — [*9*] SHASTRI, N. A.: Proc. Indian Acad. Sci. **20**, 211—223 (1944). — [*10*] SHASTRI, N. A.: J. Indian Math. Soc. (2) **3**, 8—18 (1938). — [*11*] VARMA, R. S.: J. London Math. Soc. **12**, 25—27 (1937). — [*12*] VARMA, R. S.: Phil. Mag. (7) **22**, 29—34 (1936). — [*13*] VARMA, R. S.: Proc. Cambridge Phil. Soc. **33**, 210—211 (1937). — [*14*] WATSON, G. N.: Theory of Bessel Functions. 1944. — [*15*] WHITTAKER, E. T.: Proc. London Math. Soc. **35**, 417—427 (1903). — [*16*] WHITTAKER, E. T., and G. N. WATSON: Mod. Analysis **1940**.

Dept. of Math., College of Science, Nagpur (India).

(Eingegangen am 26. Januar 1952.)

Gaier, D.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 349—350 (1953)

Schlichte Potenzreihen, die auf $|z|=1$ gleichmäßig, aber nicht absolut konvergieren.

Von

Dieter Gaier.

Vorgelegt sei das Funktionselement

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

mit dem Konvergenzradius 1. Nach Hardy [1] kann es vorkommen, daß (1) auf $|z|=1$ gleichmäßig, aber nicht absolut konvergiert. Daß dies auch dann noch möglich ist, wenn $f(z)$ in $|z|<1$ schlicht ist, wurde neuerdings von Erdös, Herzog und Piranian durch kunstvolle, aber etwas langwierige Überlegungen festgestellt[1]). Es soll hier ein einfaches Prinzip zur Erzeugung solcher Funktionen $f(z)$ angegeben werden; die Hilfsmittel sind funktionentheoretischer Art. Es handelt sich also um den folgenden

Satz. *Es gibt eine in $|z|<1$ reguläre und schlichte Funktion $f(z)$, deren Potenzreihenentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ auf $|z|=1$ gleichmäßig, aber nicht absolut konvergiert.*

Zum Beweis bemerken wir:

a) Bildet man ein beliebiges endliches Jordan-Gebiet $\mathfrak{G}_w$ der w-Ebene[2]) durch eine reguläre Funktion $z=\Phi(w)$ eineindeutig auf $|z|<1$ ab, so ist die Umkehrfunktion $w=f(z)$ in $|z|<1$ regulär und schlicht sowie in $|z|\leqq 1$ stetig[3]), die Potenzreihenentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ von $f(z)$ auf $|z|=1$ also gleichmäßig konvergent[4]).

[1]) Vgl. P. Erdös, F. Herzog und G. Piranian [2], S. 75. Die zwei Beispiele der Verff. haben noch weitere Eigenschaften: Im ersten Beispiel hat $f(z)$ nur eine Singularität auf $|z|=1$ (vgl. Schluß unserer Arbeit); beim zweiten Beispiel besitzt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ Lücken mit gegen ∞ wachsender Lückenlänge, doch soll darauf hier nicht eingegangen werden.

[2]) Das ist ein endliches Gebiet, das von einer geschlossenen Jordan-Kurve begrenzt wird.

[3]) Vgl. z.B. L. Bieberbach [1], S. 31.

[4]) Vgl. L. Fejér [3], S. 49; der Fejérsche Satz wird auch bei Erdös, Herzog und Piranian [2] herangezogen.

b) Aus den Relationen

$$\int_0^1 |f'(x)|\,dx = \int_0^1 \Big|\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,x^{n-1}\Big|\,dx$$

$$\leq \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} n\,|a_n|\,x^{n-1}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 n\,|a_n|\,x^{n-1}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

folgt, daß die Potenzreihe der in a) angegebenen Funktion $f(z)$ auf $|z|=1$ nur dann absolut konvergiert, falls $f(z)$ in $<0,1)$ schwankungsbeschränkt ist ($z=x+iy$).

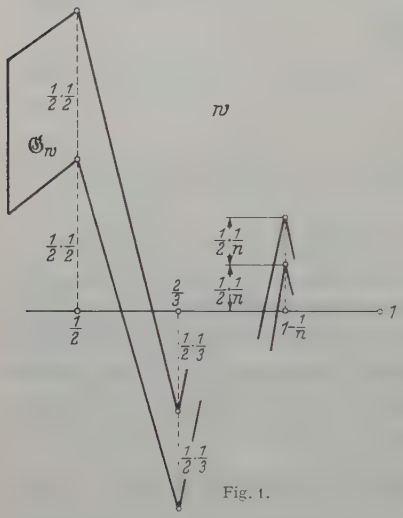

Fig. 1.

Wird also z.B. das beigezeichnete Gebiet $\mathfrak{G}_w$ durch $z=\Phi(w)$ auf $|z|<1$ abgebildet $(\Phi(1)=1)$, so besitzt die Umkehrfunktion $w=f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sämtliche in unserem Satz angegebenen Eigenschaften, da doch offenbar $f(z)$ in $<0,1)$ nicht schwankungsbeschränkt sein kann.

Abschließend sei hinzugefügt, daß man aus unserer Funktion $f(z)$ leicht eine solche Funktion $g(z)$ herstellen kann, die die im Satz genannten Eigenschaften hat und außerdem auf $|z|=1$ nur eine Singularität besitzt; man hat dazu nur die Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ an einer Stelle α mit $0<\alpha<1$ zu betrachten.

Literatur.

[1] BIEBERBACH, L.: Lehrbuch der Funktionentheorie, 2. Aufl., Bd. II. Leipzig 1931. — [2] ERDÖS, P., F. HERZOG and G. PIRANIAN: Schlicht Taylor series whose convergence on the unit circle is uniform but not absolute. Pacific J. Math. **1**, 75—82 (1951). — [3] FEJÉR, L.: La convergence sur son cercle de convergence d' une série de puissance effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple. C. r. Acad. Sci., Paris **156**, 46–49 (1913). — [4] HARDY, G. H.: A theorem concerning Taylor's series. Quart. J. Pure a. Appl. Math. **44**, 147—160 (1913).

Stuttgart, Math. Institut A der Technischen Hochschule.

(Eingegangen am 22. Oktober 1952.)

Meyer-König, W.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 351—352 (1953)

Bemerkung zu einem Lückenumkehrsatz von H. R. Pitt.

Von

Werner Meyer-König.

Es handelt sich um das High-Indices-Theorem beim Borelschen Summierungsverfahren B. Die Reihe $\sum_0^\infty a_n$ heißt B-summierbar zum Wert s, wenn

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}(a_0+\cdots+a_\nu)\,x^\nu = s$$

ist. Eine Anwendung betrifft das Euler-Knoppsche Summierungsverfahren E_p der (fest gewählten) positiven Ordnung p. Die Reihe $\sum_0^\infty a_n$ heißt E_p-summierbar zum Wert s, wenn

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{pn}}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}(2^p-1)^{n-\nu}(a_0+\cdots+a_\nu) = s$$

ist.

Im folgenden sei $0\leqq\lambda_1<\lambda_2<\cdots$ eine Folge ganzer Zahlen. Stets sei

$$\sum_0^\infty a_n \tag{1}$$

eine Reihe mit komplexen, für $n\neq\lambda_1,\lambda_2,\ldots$ verschwindenden Gliedern, und es gebe eine Zahl $\lambda>0$, so daß die Lückenbedingung

$$\lambda_{n-1}-\lambda_n\geqq\lambda\,\lambda_n \quad (n=1,2,\ldots) \tag{2}$$

erfüllt ist.

Satz 1. *Die Lückenreihe* (1) *sei B-summierbar, und es gebe eine Zahl* $\alpha>1$, *so daß*

$$a_n = O(\alpha^n) \quad (n\to\infty) \tag{3}$$

gilt; dann ist (1) *konvergent.*

Daß Satz 1 richtig ist, wenn (3) durch die stärkere Voraussetzung

$$a_n = O(\alpha^n) \quad \text{für jede Zahl} \quad \alpha>1 \tag{4}$$

ersetzt wird, ergibt sich aus einem Satz, den H. R. Pitt[1]) in Anwendung weitreichender allgemeiner Tauber-Sätze aufstellte. Es ist Verf. nicht bekannt,

[1]) Pitt, H. R.: General Tauberian theorems. Proc. Lond. Math. Soc., II. Ser. **44**, 243—288 (1938). Theorem 17.

daß daraus in der Literatur schon der Schluß auf die Richtigkeit des Satzes 1 gezogen wurde. Dieser Schluß ist aber leicht möglich. Da er an das zu erstrebende Ziel, ohne eine Voraussetzung über die Größenordnung der a_n überhaupt auszukommen, einen Schritt näher heranführt, sei hier darauf aufmerksam gemacht.

Die Voraussetzungen des Satzes 1 seien erfüllt. Wegen (3) besitzt das Funktionselement

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \tag{5}$$

einen positiven Konvergenzradius r. Nach dem Fabryschen Lückensatz ist einerseits $f(z)$ nicht über den Konvergenzkreis der Reihe (5) hinaus fortsetzbar[2]), andererseits ist $f(z)$ wegen der B-Summierbarkeit von (1) regulär im Kreisgebiet $|z-\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}$. Also ist $r \geqq 1$, d.h. (4) ist erfüllt. Die Behauptung ergibt sich nun aus dem Pittschen Satz.

Wegen des $E_p \to B$-Satzes gilt Satz 1 auch mit E_p anstatt B. Dabei kann die Voraussetzung (3) noch weggelassen werden, denn aus der E_p-Summierbarkeit von (1) folgt notwendig $a_n = o\left((2^{p-1}-1)^n\right)$. Somit ergibt sich

Satz 2. *Die Lückenreihe* (1) *sei E_p-summierbar; dann ist sie konvergent.*

Daß Satz 2 (für $p=1$) gilt, wenn (2) mit einer hinreichend großen Zahl λ erfüllt ist, hat neuerdings P. Erdös[3]) gezeigt[4]). Hinsichtlich der Voraussetzung (2) mit beliebigem $\lambda > 0$ ist Satz 2, wie P. Erdös (a. a. O.) bemerkt, bestmöglich. Es wäre erwünscht, einen Beweis des Satzes 2 zu besitzen, der ohne so tiefgreifende Hilfsmittel wie die Pittschen Untersuchungen und den Fabryschen Satz auskommt.

---

[2]) Es genügt die Berufung auf den von Borel stammenden Lückensatz, der sich auf Lücken der durch (2) gegebenen Länge bezieht.

[3]) Erdös, P.: On a Tauberian theorem for Euler summability. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. Math. **4**, 51—56 (1952).

[4]) Wegen früherer Teilergebnisse in Richtung der Sätze 1 und 2 vgl. Verf., Math. Z. **45**, 479—494 (1939) und **49**, 151—160 (1943 44), sowie die dortigen Hinweise auf A. Zygmund und Y. Okada.

Stuttgart S, Liststr. 51.

(Eingegangen am 23. Oktober 1952.)

Jurkat, W.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 353—394 (1953)

Über Rieszsche Mittel und verwandte Klassen von Matrixtransformationen.

Von
Wolfgang Jurkat.

Die vorliegende Arbeit knüpft an Untersuchungen von Herrn Peyerimhoff und dem Verfasser an, in denen Matrixtransformationen behandelt wurden, für die ein gewisser Mittelwertsatz gilt[1]). Solche Matrixtransformationen zeichnen sich durch viele angenehme Eigenschaften aus: Wir nennen als wichtige Beispiele die einfache Größenbeschränkung der limitierbaren Folgen, die vollständige Darstellung der Konvergenzfaktoren und die Anwendungen auf den Vergleich von Matrixtransformationen. In allen diesen Fällen zeigt es sich, daß durch den Mittelwertsatz die Lösung des Problems sehr erleichtert wird. Aber man wird fragen, ob die Anwendung des Mittelwertsatzes wirklich wesentlich war oder ob nicht auch für andere Matrixtransformationen dieselben Sätze gelten. Das Beispiel der Cesàroschen Mittel zeigt, daß das letztere zutrifft, denn der Mittelwertsatz gilt hier nur für Ordnungen zwischen 0 und 1, während die Sätze zu einem Teil für alle Ordnungen gelten. Man kann dies dadurch erklären, daß die Cesàroschen Mittel die Iteration der gewöhnlichen arithmetischen Mittel sind, für die jedenfalls der Mittelwertsatz gilt. Ganz ähnlich ist die Lage bei den allgemeinen bewichteten arithmetischen Mitteln und den Rieszschen Mitteln, die man in gewissem Sinne als deren Iteration ansehen kann. So entsteht von selbst der Gedanke, die Matrixtransformationen mit einem Mittelwertsatz zu iterieren, d.h. die zugehörigen Matrizen multiplikativ zusammenzusetzen. In dieser Arbeit wird der Versuch unternommen, die oben erwähnten Ergebnisse auf diese recht umfassende Klasse von Matrizen auszudehnen.

In § 1 untersuchen wir zunächst die Rieszschen Mittel. Da diese nicht unmittelbar als Iteration einer Matrixtransformation mit Mittelwertsatz definiert sind, ist es für die Anwendung unserer Theorie nötig, sie erst auf diese Form zu bringen. Wir lassen uns von der Annahme leiten, daß die Rieszschen Mittel im wesentlichen mit der Iteration der bewichteten arithmetischen Mittel äquivalent sind. Wie wir später sehen werden, trifft dies nicht ganz zu, sondern wir müssen den Prozeß der Iteration in gewisser Weise abändern. Die so definierten „allgemeinen Cesàroschen Mittel" sind dann wirklich mit den Rieszschen Mitteln in weitem Umfange äquivalent (Satz 1). Der Beweis ist jedoch nicht ganz leicht und beruht für nicht ganzzahlige Ordnungen hauptsächlich auf einer Ergänzung zum Konvexitätssatz von M. Riesz (Lemma 7).

[1]) Jurkat-Peyerimhoff [*11*], Jurkat-Peyerimhoff [*12*].

Wesentliche Vereinfachungen treten im Falle $\lambda_n = n$ auf. Die allgemeinen CESÀROschen Mittel sind dann mit den gewöhnlichen CESÀROschen Mitteln äquivalent (für ganze Ordnungen sogar identisch), und wir erhalten so einen neuen Beweis für den bekannten Äquivalenzsatz von RIESZ (Satz 2).

Der allgemeine Äquivalenzsatz wird uns gestatten, bei späteren Anwendungen die RIESZschen Mittel stets durch die allgemeinen CESÀROschen Mittel zu ersetzen. Damit haben wir zugleich ein weites Anwendungsfeld für die folgende Theorie gefunden.

In § 2 beschäftigen wir uns mit Größenbeschränkungen für Matrixtransformationen. Die früheren Ergebnisse besagen, daß die genaue Größenbeschränkung der limitierbaren Folgen durch das Diagonalglied gegeben wird, wenn für die Matrix der Mittelwertsatz gilt. Von dieser Einschränkung suchen wir uns durch den Begriff der relativen Größenbeschränkung zu befreien. Das Hauptergebnis ist Satz 4, das alle anderen im wesentlichen enthält. Durch Zusammensetzen der relativen Größenbeschränkungen (Lemma 13) können wir nun die genauen Größenbeschränkungen aller Matrizen angeben, die sich als Produkte von Matrizen mit Mittelwertsatz darstellen lassen (Satz 5). Alle diese Größenbeschränkungen werden durch das Diagonalglied gegeben. Anwendungen auf CESÀROsche Mittel (enthalten in Satz 6), RIESZsche Mittel (Sätze 7 und 8) und andere sind möglich.

In § 3 werden Fragen über Konvergenzfaktoren behandelt. Auf Grund der früheren Ergebnisse lassen sich die Konvergenzfaktoren in der RF- und FF-Form vollständig angeben, wenn für die Matrix der Mittelwertsatz gilt. Von dieser Einschränkung suchen wir uns durch stufenweisen Aufbau der Konvergenzfaktoren zu befreien (ganz entsprechend der Einführung der relativen Größenbeschränkung in § 2). Ein allgemeiner Beweis dieses Prinzips vom Zusammensetzen der Konvergenzfaktoren gelingt noch nicht. Dagegen erhalten wir unter recht allgemeinen Voraussetzungen einfache hinreichende Bedingungen (Satz 9), die eine Reihe von Anwendungen zulassen. In einem mehr speziellen Fall, der die CESÀROschen Mittel enthält, erhalten wir notwendige und hinreichende Bedingungen (Satz 10). Dieses letzte Ergebnis läßt sich auch auf die allgemeinen CESÀROschen Mittel ausdehnen, und so gelingt die Bestimmung der Konvergenzfaktoren für die RIESZschen Mittel beliebiger Ordnung (Sätze 11 und 12).

Schließlich wenden wir uns in § 4 den Vergleichssätzen für Matrixtransformationen zu. Wir hatten früher durchweg gefordert, daß die schwächere Matrix einen Mittelwertsatz erfüllen soll. Um uns von dieser Einschränkung zu befreien, gehen wir analog zu den vorangehenden Fragestellungen vor (Lemma 23). Ein erstes einfaches Resultat, das die früheren Ergebnisse enthält, ist Satz 13. Als wichtige Anwendung hiervon erhalten wir Vergleichsbedingungen mit den CESÀROschen Mitteln beliebiger Ordnung. Die Methode, die zu Satz 13 geführt hat, läßt sich aber weiter verallgemeinern (Satz 14), so daß jetzt auch die RIESZschen Mittel in den Anwendungsbereich einbezogen werden können. Für den Vergleich mit den RIESZschen Mitteln ganzzahliger Ordnung lassen sich sogar notwendige und hinreichende Bedingungen angeben

(Satz 15). Von den Anwendungen nennen wir die genauen Bedingungen für das „second theorem of consistency" für Rieszsche Mittel (§ 4.3.b) und den Vergleich der Rieszschen Mittel mit der gewöhnlichen Iteration der bewichteten arithmetischen Mittel (§ 4.3.c).

In dieser Arbeit werden ausschließlich Matrixtransformationen betrachtet. Wir möchten jedoch erwähnen, daß sich auch für Integraltransformationen eine zum Teil analoge Theorie aufbauen läßt.

1. Ein allgemeiner Äquivalenzsatz für Rieszsche Mittel.

1.1. Bezeichnungen und Identitäten. Im folgenden ist durchweg

1 (1) $\quad k$ eine ganze Zahl $\geqq 0$, $\quad 0 < \delta \leqq 1$ und $\quad \varkappa = k + \delta$;

weiter ist λ_n eine Zahlenfolge mit den Eigenschaften

1 (2) $$\Delta \lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1} < 0, \qquad 0 \leqq \lambda_n \to \infty \quad (n \to \infty).$$

Wir fassen n als Funktion von ω auf

1 (3) $$n = n(\omega): \quad \lambda_n < \omega \leqq \lambda_{n+1}$$

und setzen

1 (4) $$\begin{cases} A^0(\omega) = A(\omega) = s_n - \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu \\ A^\varkappa(\omega) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} (\omega - \lambda_\nu)^\varkappa a_\nu = \varkappa \int\limits_0^\omega (\omega - t)^{\varkappa-1} A(t)\, dt. \end{cases}$$

Eine Folge s_n heißt limitierbar (bzw. die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ summierbar) zum Wert s durch das Verfahren der Rieszschen Mittel, wenn

$$\frac{A^\varkappa(\omega)}{\omega^\varkappa} \to s \quad (\omega \to \infty)$$

gilt. Dabei sprechen wir von „stetigen" Rieszschen Mitteln, wenn ω stetig gegen ∞ strebt, und von „unstetigen" Rieszschen Mitteln, wenn ω nur die Werte λ_{n+1} durchläuft[2]).

Ist $\varphi(t)$ eine L-integrierbare Funktion, so verstehen wir unter

1 (5) $$I^\alpha[\varphi(t)] = I^\alpha(\omega) = I^\alpha(\omega; \varphi(t))$$

das Liouville-Integral der Ordnung α

1 (6) $$I^\alpha[\varphi] = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^\omega (\omega - t)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt & \text{für} \quad \alpha > 0 \\ \varphi(\omega) & \text{für} \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

Bekanntlich gilt

1 (7) $$I^\alpha[I^\beta[\varphi]] = I^{\alpha+\beta}[\varphi] \quad (\alpha, \beta \geqq 0).$$

[2]) Vgl. Jurkat [10].

Erklären wir $\nu = \nu(t)$ durch $\lambda_\nu < t \leqq \lambda_{\nu+1}$, so ist

1(8) $$s_\nu = A(t) \quad \text{und} \quad I^\varkappa[s_\nu] = \frac{A^\alpha(\omega)}{\Gamma(\alpha+1)},$$

insbesondere ist

$$I^1[s_\nu] = \sum_{\nu=0}^{n} (\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu)\, s_\nu + (\omega - \lambda_{n-1})\, s_n.$$

Wegen 1(7) gilt

1(9) $$\frac{A^\varkappa(\omega)}{\Gamma(\varkappa+1)} = I^\delta\left[\frac{A^k(t)}{\Gamma(k+1)}\right].$$

Wir definieren jetzt die neuen Mittel

1(10) $$C^\varkappa[s_\nu] = C_n^\varkappa,$$

die eine Art Iteration der bewichteten arithmetischen Mittel sind[3]):

1(11) $$\begin{cases} C^0(\omega) = C_n^0 = s_n \\ C^\varkappa(\omega) = \dfrac{1}{k+1} I^\delta\left[\dfrac{\lambda_{\nu+k+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu} C_\nu^k\right] \\ C_n^\varkappa = C^\varkappa(\lambda_{n-1}). \end{cases}$$

Es ist also

1(12) $$C^\delta(\omega) = I^\delta[s_\nu] = \frac{A^\delta(\omega)}{\Gamma(\delta+1)},$$

speziell

$$C^\delta[s_\nu] = \frac{1}{\Gamma(\delta+1)} \sum_{\nu=0}^{n} \Delta_\nu (\lambda_{n+1} - \lambda_\nu)^\delta s_\nu.$$

Weiter gilt

1(13) $$C^\varkappa[s_\nu] = \frac{1}{k+1} C^\delta\left[\frac{\lambda_{\nu+k+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu} C_\nu^k\right],$$

speziell

$$C_n^{k+1} = \frac{1}{k+1} \sum_{\nu=0}^{n} (\lambda_{\nu+k+1} - \lambda_\nu)\, C_\nu^k;$$

ferner

1(14) $$C^{k+1}(\omega) = C_n^{k+1} + \frac{\omega - \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} (C_n^{k+1} - C_{n-1}^{k+1}).$$

Für $\lambda_n = n$ ist

1(15) $$C^k[s_\nu] = S^k[s_\nu],$$

wobei

1(16) $$S^\alpha[s_\nu] = S_n^\alpha = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu-\alpha-1}{n-\nu} s_\nu \qquad (\alpha \geqq 0)$$

gesetzt ist. Wegen dieser Beziehung zu den CESÀROschen Mitteln, die durch den Iterationsprozeß 1(13) noch enger gestaltet wird, wollen wir die Transformation $C^\varkappa[s_\nu]$ als die „allgemeinen CESÀROschen Mittel" bezeichnen.

[3]) Vgl. § 4.3.c) dieser Arbeit.

Die allgemeinen Cesàroschen Mittel kann man als Verallgemeinerung der wiederholten Aufsummierung ansehen. Entsprechend soll jetzt auch der Differenzenbegriff verallgemeinert werden:

Mit den üblichen Abkürzungen

$$\Delta_\nu^0 b_\nu = b_\nu, \quad \Delta_\nu^1 b_\nu = \Delta_\nu b_\nu = b_\nu - b_{\nu+1}, \quad \Delta^{k+1} b_\nu = \Delta_\nu(\Delta_\nu^k b_\nu)$$

sei

1(17)
$$\begin{cases} \left(\dfrac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^0 b_\nu = b_\nu \\ \left(\dfrac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^{k+1} b_\nu = \dfrac{k+1}{\lambda_{\nu+k+1} - \lambda_\nu} \Delta_\nu \left(\dfrac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^k b_\nu. \end{cases}$$

Es ist also

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu b_\nu = \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^1 b_\nu = \frac{\Delta b_\nu}{\Delta\lambda_\nu}, \text{ usw.}$$

und für $\lambda_n = n$

1(18)
$$\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^k b_\nu = \Delta_\nu^k b_\nu.$$

1.2. Vorbereitende Lemmata. Unser Ziel ist zu zeigen, daß die oben definierten allgemeinen Cesàroschen Mittel mit den Rieszschen Mitteln äquivalent sind. Hierzu sind einige Vorbereitungen nötig, deren Ergebnis in den folgenden Lemmata zusammengefaßt ist. Eine wichtige Eigenschaft der allgemeinen Cesàroschen Mittel und der zugehörigen Differenzen wird durch Lemma 3 (partielle Summation) und Lemma 4 (Mittelwertsatz) ausgedrückt. Die Forderung dieser Eigenschaften hat im wesentlichen den „störenden" Faktor $\dfrac{1}{k+1} \dfrac{\lambda_{\nu+k+1}}{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu} \lambda_\nu$ zur Folge, der in 1(11) bzw. 1(13) auftritt.

Lemma 1. *Ist* $0 \leq \xi \leq \omega$, $0 < \delta \leq 1$, *so gilt*

1(19)
$$\left| \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^\xi (\omega - t)^{\delta-1} \varphi(t)\, dt \right| \leq |I^\delta(\xi'; \varphi(t))|$$

mit einem geeigneten ξ' $(0 \leq \xi' \leq \xi)$. *Ist speziell* $\varphi(t) = A(t)$ *und* $\xi = \lambda_\nu$, *so kann man* $\xi' = \lambda_{\nu'}$ $(0 \leq \nu' \leq \nu)$ *wählen.*

Die Ungleichung 1(19) ist der bekannte Rieszsche Mittelwertsatz[4]). Der Zusatz für $\varphi(t) = A(t)$ ist der entsprechende Mittelwertsatz für die unstetigen Rieszschen Mittel[5]).

Lemma 2. *Ist* $0 \leq \varrho \leq \varkappa$ $(\varkappa > 0)$ *und* $0 < \Phi_0(\omega) \nearrow$, $0 < \Phi_\varkappa(\omega) \nearrow$ [6]), *so folgt aus*

$$I^0(\omega) = o(1)\Phi_0(\omega) \quad \text{und} \quad I^\varkappa(\omega) = o(1)\Phi_\varkappa(\omega)$$

zusammen die Abschätzung

$$I^\varrho(\omega) = o(1)\,(\Phi_0(\omega))^{\frac{\varkappa-\varrho}{\varkappa}}\,(\Phi_\varkappa(\omega))^{\frac{\varrho}{\varkappa}} \quad (\omega \to \infty).$$

Die Abschätzung bleibt richtig, wenn überall $o(1)$ *durch* $O(1)$ *ersetzt wird.*

[4]) Vgl. Riesz [19], [20]; Hardy-Riesz [6], S. 28; Verblunsky [22]; Jurkat-Peyerimhoff [11].

[5]) Vgl. Jurkat [10], Jurkat-Peyerimhoff [11].

[6]) Das Zeichen „$\nearrow$" (bzw. „$\searrow$") bedeutet: wächst (bzw. fällt) monoton im weiteren Sinne.

Dies ist der bekannte Konvexitätssatz von M. RIESZ[7]). Der allgemeine Beweis von Lemma 2 ist nicht ganz einfach, aber unsere Anwendungen werden sich im wesentlichen auf den Fall $0<\varkappa\leqq 1$ beschränken, wo erhebliche Vereinfachungen auftreten (vgl. auch den Beweis von Lemma 7 dieser Arbeit).

Lemma 3 (partielle Summation). *Für $n\geqq r$ ($r\geqq 0$, ganz) gilt*

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_\nu = \sum_{\varrho=0}^{r} C_\nu^\varrho \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^\varrho b_\nu \Big|_{\nu=n-\varrho} + \sum_{\nu=0}^{n-r-1} C_\nu^r \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r b_\nu$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu \Delta b_\nu = \sum_{\varrho=1}^{r} C_\nu^\varrho \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^\varrho b_\nu \Big|_{\nu=n-\varrho} + \sum_{\nu=0}^{n-r-1} C_\nu^r \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r b_\nu .$$

Dabei ist der Wert $\nu=n-\varrho$ in den mit einem Strich bezeichneten Gliedern nach Ausführung der Differenzenbildung einzutragen.

Beweis. Die Behauptung ist richtig für $r=0$

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_\nu = s_n b_n + \sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu \Delta b_\nu = C_\nu^0 \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^0 b_\nu \Big|_{\nu=n} + \sum_{\nu=0}^{n-1} C_\nu^0 \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^0 b_\nu$$

und kann durch Induktion nach r allgemein bewiesen werden.

Lemma 4 (Mittelwertsatz). *Ist $f(x)$ k-mal differenzierbar in dem offenen Intervall $(\lambda_\nu, \lambda_{\nu+k})$ und ist $f^{(k-1)}(x)$ noch stetig in seinen Endpunkten, so gilt*

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^k f(\lambda_\nu) = (-1)^k f^{(k)}(\tau_\nu)$$

mit einem geeigneten τ_ν $(\lambda_\nu<\tau_\nu<\lambda_{\nu+k})$.

Der *Beweis* beruht darauf, daß der Ausdruck

$$\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^k f(\lambda_\nu)$$

gleich der Steigung k-ter Ordnung der Funktion $f(x)$ ist und daher nach dem Mittelwertsatz für Steigungen dieser Art gleich $f^{(k)}(\tau_\nu)\,k!$ sein muß.

Lemma 5. *Ist $\varkappa=k+\delta$ (wie üblich) und*

$$0<\eta_n\nearrow+\infty \quad \textit{für} \quad n=n(\omega)\to\infty,$$

so sind die beiden Konvergenzaussagen

$$I^\delta(\omega; s_\nu)=o(1)\,\eta_n \quad \textit{und} \quad I^\delta(\lambda_{n+1}; s_\nu)=o(1)\,\eta_n$$

äquivalent, insbesondere also auch

$$C^\varkappa(\omega)=o(1)\,\eta_n \quad \textit{und} \quad C_n^\varkappa=o(1)\,\eta_n .$$

Dies bleibt richtig, wenn überall $o(1)$ durch $O(1)$ ersetzt wird.

Einen Beweis für die in Lemma 5 behauptete Äquivalenz der stetigen und unstetigen RIESZschen Mittel findet man im Falle $\lambda_n=n$, $\eta_n=n^\delta$ bei RIESZ [21]

[7]) Vgl. RIESZ [20].

und im allgemeinen Falle bei Jurkat [10] (dort auch weitere Literatur zu diesem Fragenkreis). Allerdings bezieht sich der zuletzt genannte Beweis nicht auf den speziellen Fall $\eta^{\delta}(\omega) = \eta_n$ und braucht daher die zusätzliche Voraussetzung $\frac{\omega}{\eta(\omega)} \nearrow$. Man überzeugt sich aber leicht, daß in unserem jetzigen Falle diese Voraussetzung nicht nötig ist.

1.3. Die beiden Hauptlemmata. Wir gehen jetzt zu den wesentlichen Vorbereitungen über. Eine besondere Bedeutung kommt der Ergänzung zum Konvexitätssatz von Riesz zu (Lemma 7), auf der hauptsächlich der Beweis des Äquivalenzsatzes für nicht ganzzahlige Ordnungen beruht.

Lemma 6. *Es gelte* $0 \leqq \varrho \leqq \varkappa$ $(\varkappa > 0)$ *und*

1(20) $\qquad 0 < \eta_n \nearrow + \infty,$ $\qquad$ 1(21) $\qquad \frac{\eta_n}{|\Delta \lambda_n|^{\varkappa}} \nearrow .$

Dann folgt aus

1(22) $\qquad A^{\varkappa}(\omega) = o(1)\eta_n \qquad$ *oder* $\qquad C^{\varkappa}(\omega) = o(1)\,\eta_n$

entsprechend

1(23) $\qquad A^{\varrho}(\omega) = o(1)\,\frac{\eta_n}{|\Delta \lambda_n|^{\varkappa-\varrho}} \qquad$ *oder* $\qquad C^{\varrho}(\omega) = o(1)\,\frac{\eta_n}{|\Delta \lambda_n|^{\varkappa-\varrho}} .$

Dies bleibt richtig, wenn man überall $o(1)$ *durch* $O(1)$ *ersetzt.*

Der Teil von Lemma 6, der sich auf $A^{\varkappa}(\omega)$ bezieht, ist eine Verallgemeinerung[8]) von theorem 22 bei Hardy-Riesz [6], S. 36. Läßt man die Voraussetzung 1(21) weg, so gilt 1(23) nur noch für ganzzahlige ϱ, während sonst

$$A^{\varrho}(\omega) = o(1)\left\{ \frac{\eta_{n-1}}{|\Delta \lambda_{n-1}|^{\varkappa-\varrho}} + \frac{\eta_n}{|\Delta \lambda_n|^{\varkappa-\varrho}} \right\}$$

zu schreiben ist. Der Beweis von Hardy-Riesz läßt sich ohne Schwierigkeit auf unseren allgemeinen Fall übertragen, man hat nur $o(\lambda_{n+1}^{\varkappa})$ durch $o(\eta_n)$ bzw. $O(\eta_n)$ zu ersetzen.

Der zweite Teil von Lemma 6 zeigt die Analogie zwischen den Rieszschen und den allgemeinen Cesàroschen Mitteln. Allerdings konnten wir hier ohne die Voraussetzung 1(21) kein entsprechend einfaches Resultat beweisen.

Der folgende *Beweis* von Lemma 6 lehnt sich eng an die Darstellung bei Hardy-Riesz an (vgl. auch Satz 7 dieser Arbeit). Gewisse Vereinfachungen konnten auf Grund der Voraussetzung 1(21) vorgenommen werden. Bei späteren Anwendungen wird ϱ im allgemeinen ganzzahlig sein, und dann wird der Beweis um ein weiteres Stück einfacher.

a) Es sei $A^{\varkappa}(\omega) = o(\eta_n)$. Ist Ω eine der Zahlen

$$\lambda_n + \mu \frac{|\Delta \lambda_n|}{k+1} \qquad (\mu = 1, \ldots, k+1),$$

[8]) Vgl. auch Minakshisundaram-Rajagopal [16].

so gilt nach Formel 1 (9) und Lemma 1

$$\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_{\lambda_n}^{\Omega}(\Omega-t)^{\delta-1}\frac{A^k(t)}{\Gamma(k+1)}\,dt=\frac{A^k(\Omega)}{\Gamma(\varkappa+1)}-\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_{0}^{\lambda_n}(\Omega-t)^{\delta-1}\frac{A^k(t)}{\Gamma(k+1)}\,dt$$
$$=o(\eta_n)+o(\eta_n)=o(\eta_n).$$

Durch partielle Integration finden wir andererseits

$$\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_{\lambda_n}^{\Omega}(\Omega-t)^{\delta-1}\frac{A^k(t)}{\Gamma(k+1)}\,dt$$
$$=\frac{(\Omega-\lambda_n)^{\delta}}{\Gamma(\delta+1)}\cdot\frac{A^k(\lambda_n)}{\Gamma(k+1)}+\cdots+\frac{(\Omega-\lambda_n)^{\delta+k-1}}{\Gamma(\delta+k)}\frac{A^1(\lambda_n)}{\Gamma(2)}+\frac{(\Omega-\lambda_n)^{\delta+k}}{\Gamma(\delta+k+1)}\frac{A^0(\lambda_{n+1})}{\Gamma(1)}$$
$$=c_0\,\mu^{\varkappa}\cdot|\Delta\lambda_n|^{\varkappa}A^0(\lambda_{n+1})+\sum_{\varrho=1}^{k}c_\varrho\,\mu^{\varkappa-\varrho}\cdot|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-\varrho}A^\varrho(\lambda_n)\qquad(c_\varrho\neq 0).$$

Für $\mu=1,\ldots,k+1$ erhalten wir $k+1$ verschiedene Linearkombinationen von

1 (24) $\qquad |\Delta\lambda_n|^{\varkappa}A^0(\lambda_{n+1}),\quad |\Delta\lambda_n|^{\varkappa-\varrho}A^\varrho(\lambda_n)\qquad(\varrho=1,\ldots,k),$

die alle die Größenordnung $o(\eta_n)$ haben. Da aber ihre Determinante

$$\det(c_\varrho\mu^{\varkappa-\varrho})=c_0\ldots c_k\det(\mu^{\varkappa-\varrho})\neq 0$$

ist, müssen die Ausdrücke 1 (24) selbst diese Größenordnung besitzen. Wegen $A^0(\omega)=A^0(\lambda_{n+1})$ folgt insbesondere

$$A^0(\omega)=o(1)\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa}}$$

und weiter wegen

$$A^\varrho(\omega)=A^\varrho(\lambda_n)+\varrho\int_{\lambda_n}^{\omega}A^{\varrho-1}(t)\,dt$$

nacheinander

$$A^\varrho(\omega)=o(1)\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-\varrho}}\quad\text{für}\quad\varrho=1,\ldots,k.$$

Nach Lemma 2 können wir aber schon aus

$$A^0(\omega)=o(1)\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa}}\quad\text{und}\quad A^\varkappa(\omega)=o(1)\,\eta_n$$

direkt schließen

$$A^\varrho(\omega)=o(1)\left(\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa}}\right)^{\frac{\varkappa-\varrho}{\varkappa}}(\eta_n)^{\frac{\varrho}{\varkappa}}=o(1)\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-\varrho}},$$

und dies gilt nicht nur für die ganzzahligen Werte von ϱ, sondern für alle $0\leq\varrho\leq\varkappa$.

b) Es sei $C^\varkappa(\omega)=o(1)\,\eta_n$. Wir wissen aus Teil a) des Beweises, daß für $k\leq\varrho\leq\varkappa$ aus

$$I^{\varkappa-k}[s_\nu]=o(1)\,\eta_n\quad\text{stets}\quad I^{\varrho-k}[s_\nu]=o(1)\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-\varrho}}$$

folgt. Denn $I^{\varkappa-k}$ und $I^{\varrho-k}$ sind abgesehen von konstanten Faktoren gleich $A^{\varkappa-k}$ bzw. $A^{\varrho-k}$, und es gilt

1 (25) $\qquad 0<\eta_n \nearrow +\infty,$ $\qquad$ 1 (26) $\quad \left(\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-k}}\right)^{\varkappa} = \left(\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa}}\right)^{\varkappa-k} \eta_n^k \nearrow .$

Die rechte Seite von 1 (26) strebt sogar gegen ∞, wenn $k \geq 1$ ist.

In unserem Falle ist nach Voraussetzung

$$C^{\varkappa}(\omega) = \frac{1}{k+1} I^{\varkappa-k}\left[\frac{\lambda_{\nu+k+1}-\lambda_{\nu}}{\lambda_{\nu+1}-\lambda_{\nu}} C_{\nu}^{k}\right] = o(1)\,\eta_n .$$

Also gilt für $k<\varrho\leq\varkappa$

$$C^{\varrho}(\omega) = \frac{1}{k+1} I^{\varrho-k}\left[\frac{\lambda_{\nu+k+1}-\lambda_{\nu}}{\lambda_{\nu+1}-\lambda_{\nu}} C_{\nu}^{k}\right]$$

1 (27) $\qquad = o(1)\,\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-\varrho}}$

und für $\varrho = k$

$$\frac{\lambda_{n+k+1}-\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} C_n^k = o(1)\,\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-k}}, \qquad \text{d.h.} \quad C_n^k = o(1)\,\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-k}} .$$

Ist $k=0$, so ist $C_n^k = C^k(\omega)$, und es folgt 1 (27) auch für $\varrho = k$. Ist aber $k \geq 1$, so folgt wegen 1 (14) und 1 (26) wieder

$$C^k(\omega) = C_n^k + \frac{\omega-\lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}(C_n^k - C_{n-1}^k)$$

$$= o(1)\,\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-k}} .$$

In jedem Falle gilt also 1 (27) für $k\leq\varrho\leq\varkappa$.

Ist $0<\varkappa\leq 1$, so ist die Behauptung damit bewiesen. Wir nehmen jetzt die Behauptung für $0<\varkappa\leq r$ (r ganz) als richtig an und werden dann ihre Gültigkeit für $r<\varkappa\leq r+1$ zeigen:

Der bisherige Beweis zeigt ($k=r$), daß 1 (27) jedenfalls für $r\leq\varrho\leq\varkappa$ richtig ist. Insbesondere ist

1 (28) $\qquad C^r(\omega) = o(1)\,\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-r}} .$

Für $\varkappa = r$ ist aber nach Induktionsannahme die Behauptung richtig, und es gilt wegen 1 (26) und 1 (21)

$$0<\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-r}} \nearrow +\infty, \qquad \frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-r}} : |\Delta\lambda_n|^{r} = \frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa}} \nearrow \quad (k=r\geq 1).$$

Daher folgt aus 1 (28) die Abschätzung

$$C^{\varrho}(\omega) = o\left(\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-r}}\right)\frac{1}{|\Delta\lambda_n|^{r-\varrho}} = o(1)\,\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-\varrho}} \quad \text{für} \quad 0\leq\varrho\leq r.$$

Also gilt 1 (27) für alle $0\leq\varrho\leq\varkappa$, q. e. d.

Der Zusatz über die Vertauschung von $o(1)$ mit $O(1)$ ist bei beiden Teilen des Beweises leicht nachzuprüfen.

Lemma 7. *Es sei* $|\Delta\lambda_n|$ *monoton (wachsend oder fallend) und* $0<\delta<1$; *weiter gelte*

1(29) $\quad 0<\eta_n \nearrow +\infty,$ $\qquad$ 1(30) $\quad \frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^\delta} \nearrow,$ $\qquad$ 1(31) $\quad n\,|\Delta\lambda_n|^\delta \nearrow.$

Dann folgt aus

$$I^0(\omega)=o(\eta_n)\,|\Delta\lambda_n|^{-\delta} \quad \text{und} \quad I^1(\omega)=o(\eta_n)\,|\Delta\lambda_n|^{1-\delta}$$

zusammen die Abschätzung

$$I^\delta(\omega)=o(\eta_n).$$

Dies bleibt richtig, wenn überall $o(\eta_n)$ *durch* $O(\eta_n)$ *ersetzt wird.*

Lemma 7 ist eine Ergänzung zu Lemma 2: Ist $|\Delta\lambda_n \nearrow$, so gewinnen wir nichts Neues, da dann $\eta_n\,|\Delta\lambda_n|^{1-\delta} \nearrow$ ist. Der nachfolgende Beweis wird für diesen Fall auch sehr einfach (die Bedingung $n\,|\Delta\lambda_n|^\delta \nearrow$ ist dann von selbst erfüllt). Wächst $|\Delta\lambda_n|$ nicht mehr monoton, so läßt sich Lemma 2 im allgemeinen nicht mehr anwenden. Man denke z.B. an $\eta_n=\lambda_n=\log n$, wo sogar $\eta_n\,|\Delta\lambda_n|^{1-\delta}\to 0$ strebt. Trotzdem läßt sich die Behauptung aufrechterhalten, wenn auch unter zusätzlichen Voraussetzungen über die Regularität des Wachstums von $|\Delta\lambda_n|$. Die Einschränkung, die unsere Voraussetzungen mit sich bringen, ist aber nicht groß. Denn es muß stets $n\,|\Delta\lambda_n|^\delta$ unbeschränkt sein, weil sonst die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\Delta\lambda_\nu| \le K \sum_\nu \left(\frac{1}{\nu}\right)^{1+\delta}$$

konvergieren, also λ_n gegen einen endlichen Wert streben würde.

Beweis. Wir fassen wie üblich n und ν als Funktionen von ω bzw. t auf und schreiben

$$I^\delta(\omega)=\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^{\lambda_{n-1}} (\omega-t)^{\delta-1} I^0(t)\,dt+\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_{\lambda_{n-1}}^{\omega} (\omega-t)^{\delta-1} I^0(t)\,dt = \mathrm{I}+\mathrm{II}.$$

Wegen 1(30) ist

$$\mathrm{II}=o(1)\,\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^\delta}\,(\omega-\lambda_{n-1})^\delta = o(\eta_n),$$

denn aus 1(31) folgt

1(32) $\qquad |\Delta\lambda_{n-1}| = O(1)\,|\Delta\lambda_n|.$

Durch partielle Integration finden wir

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= O(1)\,(\omega-\lambda_{n-1})^{\delta-1} I^1(\lambda_{n-1}) + O(1)\int_0^{\lambda_{n-1}} (\omega-t)^{\delta-2} I^1(t)\,dt \\ &= o(\eta_n) + o(\eta_n)\int_0^{\lambda_{n-1}} (\omega-t)^{\delta-2}\,|\Delta\lambda_\nu|^{1-\delta}\,dt,\end{aligned}$$

wobei wir wegen der Stetigkeit von $I^1(\omega)$ die Abschätzung

$$I^1(\lambda_{n-1})=o(\eta_{n-1})\,|\Delta\lambda_{n-1}|^{1-\delta}$$

benutzen durften. Die Behauptung ist also bewiesen, wenn wir

1(33) $$\int_0^{\lambda_{n-1}} (\lambda_n - t)^{\delta-2} |\Delta \lambda_\nu|^{1-\delta} \, dt = O(1)$$

zeigen können.

Da für monoton wachsendes $|\Delta \lambda_n|$ die Bedingung 1(33) trivialerweise erfüllt ist, können wir uns auf den Fall $|\Delta \lambda_n| \searrow$ beschränken. Aus der Voraussetzung 1(31) folgt dann

1(34) $$0 < a \leqq \frac{|\Delta \lambda_n|}{|\Delta \lambda_{n-1}|} \leqq A, \quad \frac{|\Delta^2 \lambda_n|}{|\Delta \lambda_n|^{1+\delta}} = O(1).$$

Die erste dieser Bedingungen ist teils selbstverständlich ($A = 1$), teils schon unter 1(32) angeführt. Die zweite ergibt sich in folgender Art von oben nach unten schließend:

$$|\Delta \lambda_n|^\delta \leqq \frac{n+1}{n} |\Delta \lambda_{n+1}|^\delta = |\Delta \lambda_{n+1}|^\delta + \frac{|\Delta \lambda_{n+1}|^\delta}{n},$$

$$\frac{|\Delta^2 \lambda_n|}{|\Delta \lambda_n|^{1-\delta}} = O(1) \, \Delta |\Delta \lambda_n|^\delta = O(1) \, \frac{|\Delta \lambda_{n+1}|^\delta}{n},$$

$$\frac{|\Delta^2 \lambda_n|}{|\Delta \lambda_n|^{1+\delta}} = O(1) \frac{1}{n |\Delta \lambda_n|^\delta} = O(1).$$

Wir bestimmen nun n' durch die Ungleichungen

$$\lambda_{n'} < \lambda_n - 1 \leqq \lambda_{n'+1} \quad (0 \leqq n' \leqq n-1)$$

und schreiben

$$\int_0^{\lambda_{n-1}} (\lambda_n - t)^{\delta-2} |\Delta \lambda_\nu|^{1-\delta} \, dt = \int_0^{\lambda_{n'}} + \int_{\lambda_{n'}}^{\lambda_{n-1}}.$$

Es gilt

$$\int_0^{\lambda_{n'}} = O(1) \int_0^{\lambda_{n'}} (\lambda_n - t)^{\delta-2} \, dt$$

$$= O(1) + O(1) (\lambda_n - \lambda_{n'})^{\delta-1} = O(1)$$

und weiter

$$\int_{\lambda_{n'}}^{\lambda_{n-1}} = \sum_{\nu=n'}^{n-2} |\Delta \lambda_\nu|^{1-\delta} \frac{1}{1-\delta} \left[(\lambda_n - t)^{\delta-1}\right]_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}}$$

$$= \frac{1}{1-\delta} \left\{ |\Delta \lambda_{n-2}|^{1-\delta} (\lambda_n - \lambda_{n-1})^{\delta-1} - |\Delta \lambda_{n'}|^{1-\delta} (\lambda_n - \lambda_{n'})^{\delta-1} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{1-\delta} \sum_{\nu=n'}^{n-3} (\lambda_n - \lambda_{\nu+1})^{\delta-1} \Delta |\Delta \lambda_\nu|^{1-\delta}$$

$$= O(1) + O(1) \sum_{\nu=n'}^{n-3} (\lambda_n - \lambda_{\nu+1})^{\delta-1} \, \Delta \lambda_{\nu+1},$$

da wegen 1(34)

$$\Delta |\Delta \lambda_\nu|^{1-\delta} = O(1) \frac{|\Delta^2 \lambda_\nu|}{|\Delta \lambda_\nu|^\delta} = O(1) |\Delta \lambda_\nu| = O(1) |\Delta \lambda_{\nu+1}|$$

ist. Schließlich gilt

$$\sum_{\nu=n'}^{n-3}(\lambda_n-\lambda_{\nu+1})^{\delta-1}|\Delta\lambda_{\nu+1}|\leq\sum_{\nu=n'}^{n-3}\int_{\lambda_{\nu+1}}^{\lambda_{\nu+2}}(\lambda_n-t)^{\delta-1}\,dt$$
$$=O(1)\{(\lambda_n-\lambda_{n-1})^{\delta}+(\lambda_n-\lambda_{n'+1})^{\delta}\}$$
$$=O(1).$$

Insgesamt erhalten wir 1(33), q. e. d.

Der Zusatz über die Vertauschung von $o(\eta_n)$ mit $O(\eta_n)$ ist leicht nachzuprüfen.

Die hier zum Beweis von Lemma 7 benutzte Methode gestattet auch allgemeinere Aussagen darüber zu machen, wie sich die Monotonievoraussetzungen bei Lemma 2 vermeiden lassen. Wir wollen jedoch hierauf nicht weiter eingehen.

1.4. Der allgemeine Äquivalenzsatz.

Satz 1. *Es sei* $\varkappa=k+\delta$ ($k\geq 0$, *ganz*; $0<\delta\leq 1$) *und*

1(35) $0<\eta_n\nearrow+\infty$, 1(36) $\frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa}}\nearrow$, 1(37) $\Lambda_n=\frac{\lambda_{n+1}}{|\Delta\lambda_n|}\nearrow$.

Bei nicht ganzzahligem $\varkappa$ (*d.h.* $0<\delta<1$) *sei außerdem*

1(38) $|\Delta\lambda_n|$ *monoton*, 1(39) $n|\Delta\lambda_n|^{\delta}\nearrow$.

Unter diesen Voraussetzungen sind die drei folgenden Konvergenzaussagen äquivalent:

$$A^{\varkappa}(\omega)=o(1)\eta_n,\qquad C^{\varkappa}(\omega)=o(1)\eta_n,\qquad C_{\varkappa}^{\varkappa}=o(1)\eta_n;$$

insbesondere sind äquivalent ($\eta_n=\lambda_{n+1}^{\varkappa}$)

1(40) $$\frac{A^{\varkappa}(\omega)}{\omega^{\varkappa}}=s+o(1)\quad\text{und}\quad\frac{C^{\varkappa}s_{\nu}}{C^{\varkappa}1}=s-o(1).$$

Die Behauptung bleibt richtig, wenn überall $o(1)$ *durch* $O(1)$ *ersetzt wird.*

Satz 1 berechtigt uns, die RIESZschen Mittel und die allgemeinen CESÀROschen Mittel als weitgehend äquivalent anzusehen. Die Voraussetzungen werden im allgemeinen erfüllt sein: Zum Beispiel wird im allgemeinen Λ_n monoton wachsen, da für die nicht konvergenzgleichen RIESZschen Mittel Λ_n unbeschränkt sein muß. Auf die besonderen Verhältnisse für $\lambda_n=n$, also im Falle der gewöhnlichen CESÀROschen Mittel, werden wir in § 1.5 zu sprechen kommen. Der nachfolgende Beweis wird in diesem Falle wesentlich einfacher.

Beweis. Es wird genügen, die Äquivalenz von

1(41) $$A^{\varkappa}(\omega)=o(1)\eta_n\quad\text{mit}\quad C^{\varkappa}(\omega)=o(1)\eta_n$$

zu zeigen. Denn nach Lemma 5 gilt dann auch die Äquivalenz mit $C_n^{\varkappa} = o(1)\,\eta_n$. Weiter folgt aus 1(37) nacheinander

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = \left(1 - \frac{1}{\Lambda_n}\right)^{-1} \searrow, \quad \text{also} \quad \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = O(1),$$

1(42)
$$|\Delta\lambda_n| \leq |\Delta\lambda_{n-1}| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = O(1)\,|\Delta\lambda_{n-1}|,$$
$$0 < a \leq \frac{C^{\varkappa}[1]}{\lambda_{n+1}^{\varkappa}} \leq A.$$

Also muß auch 1(40) gelten.

Die Äquivalenz 1(41) beweisen wir durch Induktion. Für $0 < \varkappa \leq 1$ ist die Behauptung wegen 1(12) selbstverständlich. Wir nehmen jetzt die Behauptung für $0 < \varkappa \leq r$ (r ganz) als richtig an und werden dann ihre Gültigkeit für $r < \varkappa \leq r+1$ zeigen:

Der Beweis geht von den beiden folgenden Formeln aus

1(43)
$$\begin{cases} \dfrac{A^{k+1}(\omega)}{\Gamma(k+2)} = C_n^{k+1} + \dfrac{1}{\Gamma(k+2)} \displaystyle\sum_{\varrho=0}^{k} C_\nu^{\varrho} \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^{\varrho} (\omega - \lambda_\nu)^{k+1}, \quad \nu = n-\varrho \\ \qquad - \dfrac{1}{k+1} \displaystyle\sum_{\nu=n-k}^{n} (\lambda_{\nu+k+1} - \lambda_\nu)\, C_\nu^k, \end{cases}$$

1(44)
$$C^{k+1}(\omega) = C_n^{k+1} + \frac{\omega - \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \cdot \frac{\lambda_{n+k+1} - \lambda_n}{k+1} C_n^k.$$

Die Formel 1(43) folgt aus Lemma 3, wenn man

$$b_\nu = \frac{1}{\Gamma(k+2)} (\omega - \lambda_\nu)^{k+1}, \qquad r = k$$

setzt und die nach Lemma 4 gültige Beziehung

$$\Delta_\nu \left(\frac{1}{\Delta\lambda}\right)_r^k b_\nu = \frac{\lambda_{\nu+k+1} - \lambda_\nu}{k+1}$$

berücksichtigt.

Es sei nun

$$A^{\varkappa}(\omega) = o(1)\,\eta_n \quad \text{oder} \quad C^{\varkappa}(\omega) = o(1)\,\eta_n.$$

Aus Lemma 6 und der Induktionsannahme folgt dann in jedem Fall

1(45)
$$C^{\varrho}(\omega) = o(1) \frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-\varrho}} \qquad (\varrho = 0, 1, \ldots, k).$$

Denn es ist $k = r$, und für $\varrho \geq 1$ gilt nach 1(26)

$$0 < \frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-\varrho}} \nearrow +\infty, \quad \frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^{\varkappa-\varrho}} \cdot \frac{1}{|\Delta\lambda_n|^{\varrho}} \nearrow$$

[für $\varrho = 0$ folgt 1(45) unmittelbar aus Lemma 6]. Weiter ist nach Lemma 4 und 1(42)

1(46)
$$\begin{cases} \left(\dfrac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^{\varrho} (\omega - \lambda_\nu)^{k+1} = O(1)\,(\omega - \lambda_\nu)^{k+1-\varrho} = O(1)\,|\Delta\lambda_\nu|^{k+1-\varrho} \\ \qquad\qquad (\nu = n-\varrho; \quad \varrho = 0, 1, \ldots, k). \end{cases}$$

Wir tragen 1(45) und 1(46) in 1(43) und 1(44) ein und erhalten

$$\frac{A^{k+1}(\omega)}{\Gamma(k+2)} - C^{k+1}(\omega) = o(\eta_n) \max_{\nu} |\Delta\lambda_\nu|^{k+1-\varkappa} \qquad (n-k \leqq \nu \leqq n).$$

Ist $\varkappa$ ganzzahlig (d.h. $\varkappa = k+1$), so ist damit die Behauptung bewiesen. Bei nicht ganzzahligem $\varkappa$ (d.h. $0<\delta<1$) ist wegen 1(39)

$$|\Delta\lambda_{n-1}| = O(1)\,|\Delta\lambda_n|,$$

und daher gilt dann

1(47) $$\frac{A^{k+1}(\omega)}{\Gamma(k+2)} - C^{k+1}(\omega) = o(\eta_n)\,|\Delta\lambda_n|^{1-\delta}.$$

Der Formel 1(47) stellen wir die analog gebaute Formel

1(48) $$\frac{A^k(\omega)}{\Gamma(k+1)} - \frac{1}{k+1}\frac{\lambda_{n+k+1}-\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} C_n^k = o(\eta_n)\,|\Delta\lambda_n|^{-\delta}$$

gegenüber, die sofort aus 1(45) mit $\varrho = k$ und der nach Induktionsannahme richtigen Parallelformel für $A^k(\omega)$ folgt. Bezeichnen wir die linke Seite von 1(48) mit $I^0(\omega)$, so ist die linke Seite von 1(47) gleich $I^1(\omega)$. Die Voraussetzungen von Lemma 7 sind dann erfüllt, und es folgt

$$I^\delta(\omega) = \frac{A^\varkappa(\omega)}{\Gamma(\varkappa+1)} - C^\varkappa(\omega) = o(\eta_n), \qquad \text{q. e. d.}$$

Der Zusatz über die Vertauschung von $o(1)$ mit $O(1)$ ist leicht nachzuprüfen.

1.5. Der RIESZsche Äquivalenzsatz für die gewöhnlichen CESÀROschen Mittel. Wir wenden uns jetzt dem Fall $\lambda_n = n$ zu.

Satz 2. *Ist $\lambda_n = n$ und $0<\eta_n \nearrow +\infty$, so sind die beiden Konvergenzaussagen*

$$A^\varkappa(\omega) = o(1)\,\eta_n \qquad \textit{und} \qquad S_n^\varkappa = o(1)\,\eta_n$$

äquivalent, insbesondere also auch ($\eta_n = n^\varkappa$)

1(49) $$\frac{A^\varkappa(\omega)}{\omega^\varkappa} = s + o(1) \quad \textit{und} \quad \frac{S_n^\varkappa}{\binom{n+\varkappa}{n}} = s + o(1).$$

Dies bleibt richtig, wenn überall $o(1)$ durch $O(1)$ ersetzt wird.

Der Spezialfall 1(49) ist der bekannte RIESZsche Äquivalenzsatz[9]). Für ganze $\varkappa$ ist Satz 2 schon in Satz 1 enthalten, da dann $C_n^\varkappa = S_n^\varkappa$ gilt. Für nicht ganze $\varkappa$ fallen aber die Ergebnisse auseinander, und Satz 2 ist dann gleichbedeutend mit der Äquivalenz von

$$C^\varkappa(\omega) = o(1)\,\eta_n \quad \text{und} \quad S_n^\varkappa = o(1)\,\eta_n.$$

Wegen

$$C^\varkappa(\omega) = I^\delta[C_\nu^k], \qquad S_n^\varkappa = S^\delta[S_\nu^k], \qquad C_\nu^k = S_\nu^k$$

[9]) M. RIESZ [19], eine ausführliche Darstellung des Beweises von M. RIESZ findet man bei HOBSON [8], S. 90—98; weitere Beweise gaben INGHAM (unveröffentlicht, für ganze $\varkappa$ vgl. HARDY [5], S. 113), GERGEN-LITTAUER [2], GERGEN [1], JURKAT-PEYERIMHOFF [12] (für $0<\varkappa\leqq 1$).

genügt es, die Äquivalenz von

1(50) $$I^\delta[s_\nu] = o(1)\,\eta_n \quad \text{mit} \quad S^\delta[s_\nu] = o(1)\,\eta_n$$

zu zeigen. Damit ist der Beweis des allgemeinen Falles zurückgeführt auf den Spezialfall $\varkappa = \delta$ $(0 < \delta < 1)$.

Wir werden jetzt den *Beweis* von 1(50) erbringen, und zwar nach der Methode von M. Riesz:

Es sei also

$$I^\delta[s_\nu] = o(1)\,\eta_n \quad \text{oder} \quad S^\delta[s_\nu] = o(1)\,\eta_n .$$

In beiden Fällen gilt (vgl. Lemma 6 und 10 dieser Arbeit)

$$s_n = o(1)\,\eta_n .$$

Weiter ist

$$\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\,\Delta_\nu(\omega-\nu)^\delta - \binom{n-\nu+\delta-1}{n-\nu} = O(1)\,(n-\nu)^{\delta-2}$$

gleichmäßig für $0 \leqq \nu < n$, $n < \omega \leqq n+1$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} I^\delta[s_\nu] - S^\delta[s_\nu] &= s_n \frac{(\omega-n)^\delta}{\Gamma(\delta+1)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu \frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\,\Delta_\nu(\omega-\nu)^\delta - \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \binom{n-\nu+\delta-1}{n-\nu} \\ &= o(\eta_n) + o(\eta_n) \sum_{\nu=0}^{n-1} (n-\nu)^{\delta-2} \\ &= o(\eta_n), \end{aligned}$$

und damit ist die Behauptung bewiesen.

Der Zusatz über die Vertauschung von $o(1)$ mit $O(1)$ ist leicht nachzuprüfen.

2. Größenbeschränkungen für Matrixtransformationen.

Wir betrachten im folgenden reelle Matrixtransformationen der Form

2(1) $$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu}\, s_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \bar{a}_{n\nu}\, a_\nu$$

mit

2(2) $$a_{n\nu} = \bar{a}_{n\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \nu > n, \qquad a_{n\nu} = \Delta_\nu \bar{a}_{n\nu} .$$

Wir wollen sagen, daß durch diese Transformation ein Matrixverfahren $\mathfrak{A}$ gegeben sei, und nennen die Matrizen $A = (a_{n\nu})$ bzw. $\bar{A} = (\bar{a}_{n\nu})$ die FF- bzw. RF-Form von $\mathfrak{A}$. Die Matrix A oder $\bar{A}$ heißt normal, wenn

2(3) $$a_{nn} = \bar{a}_{nn} \neq 0$$

ist. Die Konvergenz wird durch die Matrizen

2(4) $$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \bar{E} = S = \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \mathbf{1} & & & \ddots \end{pmatrix}$$

dargestellt. Wir schreiben

$$2(5) \qquad \Delta^r A = (\Delta^r_\nu a_{n\nu}) = AS^{-r} \quad (r \text{ ganz}, \geqq 0),$$

insbesondere ist

$$2(6) \qquad A = \Delta^1 \overline{A} = \Delta \overline{A}.$$

Als Beispiele seien die bewichteten arithmetischen Mittel $M(p_n)$ und die NÖRLUNDschen Mittel $N(p_n)$ in der FF-Form angegeben

$$M(p_n): \qquad \sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_\nu s_\nu \qquad (p_\nu > 0),$$

$$N(p_n): \qquad \sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} p_{n-\nu} s_\nu \qquad (p_\nu > 0).$$

2.1. Matrizen mit Mittelwertsatz. Unser Ziel ist, die genaue Größenbeschränkung der limitierbaren Folgen für eine möglichst umfangreiche Klasse von Matrixverfahren festzustellen. Es hat sich gezeigt, daß diese Größenbeschränkung in einfacher Weise angegeben werden kann bei allen Matrizen, für die ein gewisser Mittelwertsatz gilt. Wir stellen im folgenden zuerst die für unseren Zweck wichtigen Eigenschaften der Matrizen mit Mittelwertsatz zusammen und werden dann zu Verallgemeinerungen übergehen.

Wir wollen sagen: „A hat die Eigenschaft $\mathfrak{M}$" oder „es gilt $\mathfrak{M}(A)$", wenn für jede Folge $\{s_\nu\}$ und alle $n \leq m$ die Ungleichung

$$\mathfrak{M}: \qquad \sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu \Big| \leq K \Big| \sum_{\nu=0}^{n'} a_{n'\nu} s_\nu \qquad (0 \leq n' \leq n)$$

mit geeignetem n' gilt.

Lemma 8. *Hinreichend für $\mathfrak{M}$ sind die folgenden Bedingungen*

$$(\mathrm{M}_1) \qquad a_{n\nu} \neq 0, \qquad 0 \leq \frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} \leq K \quad (0 \leq \nu \leq n \leq m);$$

$$(\mathrm{M}_2) \qquad \frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} \searrow \text{ für } \nu \nearrow \qquad (0 \leq \nu \leq n \leq m).$$

(JURKAT-PEYERIMHOFF [11], Satz 1.)

Beispiele von Transformationen, für die (M_1), (M_2) und folglich auch der Mittelwertsatz $\mathfrak{M}$ gilt:

$$C^\delta[s_\nu], \qquad S^\delta[s_\nu], \qquad M(p_n) \quad (\text{für alle } p_n)$$

und $N(p_n)$, falls noch zusätzlich

$$0 < p_n \searrow, \qquad \frac{p_{n+1}}{p_n} \nearrow \quad \text{für} \quad n \nearrow$$

erfüllt ist.

Lemma 9. *Die Matrix A sei normal, und es gelte $\mathfrak{M}(A)$ und die Spaltenbedingung*

$Sp_0(A)$: $\qquad a_{n\nu} \to 0 \quad (n \to \infty, \ \nu \text{ fest}).$

Dann folgt aus $\sigma_n = o(1)$ *für* $n \to \infty$, *daß auch*

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu = o(1) \quad \text{für} \quad m \to \infty$$

ist, und zwar gleichmäßig für alle $0 \leqq n \leqq m$.

Unter den Voraussetzungen (M_1) und (M_2) statt $\mathfrak{M}$ ist der Beweis sehr leicht, vgl. Jurkat-Peyerimhoff [*11*], Satz 3. Einen allgemeinen Beweis gaben Zeller [*13*], Satz 3.3; Jurkat-Peyerimhoff [*12*], Satz 4 (Zusatz).

Lemma 10. *Die Matrix* A *sei normal, und es gelte* $\mathfrak{M}(A)$ *und* $Sp_0(A)$. *Weiter sei* $0 < \eta_n \nearrow$. *Dann folgt aus*

2(7) $$\sigma_n = o(\eta_n) \quad bzw. \quad \sigma_n = O(\eta_n)$$

entsprechend

2(8) $$s_n = o(\eta_n)\frac{1}{a_{nn}} \quad bzw. \quad s_n = O(\eta_n)\frac{1}{a_{nn}}.$$

(Jurkat-Peyerimhoff [*11*], Satz 4 und 6.)

Zusatz. Ist $0 < \eta_n \nearrow + \infty$, so kann die Voraussetzung $Sp_0(A)$ weggelassen werden. (In diesem Fall ist die Anwendung von Lemma 9 unnötig; vgl. auch den Beweis von Satz 4 dieser Arbeit.)

Liegt der Sachverhalt von Lemma 10 vor, d.h. folgt aus 2(7) stets 2(8) für alle positiven, monoton wachsenden Zahlenfolgen η_n, so wollen wir sagen: „Zur Matrix A gehört die Größenbeschränkung $1/a_{nn}$" [oder allgemeiner die Größenbeschränkung g_n, $g_n \neq 0$, wenn in 2(8) die Zahlenfolge g_n an die Stelle von $1/a_{nn}$ zu treten hat].

Lemma 11. *Ist* A *normal und* g_n *eine Größenbeschränkung von* A, $g_n \neq 0$, *so gilt jedenfalls*

$$\frac{1}{a_{nn}} = O(g_n).$$

Dies ist eine leichte Verallgemeinerung von Jurkat-Peyerimhoff [*11*], Satz 5. Der Beweis folgt wieder aus dem Toeplitzschen Satz (vgl. auch die Bemerkungen nach Lemma 15 und 16).

Die beiden Lemmata 10 und 11 besagen zusammen, daß $1/a_{nn}$ eine Größenbeschränkung von A ist und daß sich diese Größenbeschränkung nicht verbessern läßt. Anders ausgedrückt: „Die genaue Größenbeschränkung von A wird durch das Diagonalglied gegeben."

Lemma 12. *Die genaue Größenbeschränkung der normalen Matrix* A *werde durch das Diagonalglied gegeben und dieses falle (dem Betrage nach) monoton. Dann ist die genaue Größenbeschränkung von* $\overline{A}$ *ebenfalls* $1/a_{nn} = 1/\overline{a}_{nn}$, *d.h. aus* 2(7) *folgt entsprechend*

2(9) $$a_n = o(\eta_n)\frac{1}{a_{nn}} \quad bzw. \quad a_n = O(\eta_n)\frac{1}{a_{nn}},$$

und diese Abschätzung läßt sich nicht verbessern.

Der Beweis ist trivial. Für die Matrix $\overline{A}$ selbst braucht der Mittelwertsatz nicht zu gelten[10]), und doch wird die genaue Größenbeschränkung wieder durch das Diagonalglied gegeben. Wir werden im folgenden nach umfassenderen Kriterien für Matrizen mit dieser besonderen Eigenschaft suchen.

2.2. Relative Größenbeschränkungen. Wir verallgemeinern die Fragestellung: A und B seien zwei normale Matrizen, und es sei

$$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} = a_{n\nu} s_\nu, \qquad \tau_n = \sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu} s_\nu.$$

Wir wollen sagen, „die genaue Größenbeschränkung von A nach B wird durch das Diagonalglied gegeben", wenn für jede positive, monoton wachsende Zahlenfolge η_n aus

2(10) $$\sigma_n = o(\eta_n) \quad \text{bzw.} \quad \sigma_n = O(\eta_n)$$

entsprechend

2(11) $$\tau_n = o(\eta_n)\frac{b_{nn}}{a_{nn}} \quad \text{bzw.} \quad \tau_n = O(\eta_n)\frac{b_{nn}}{a_{nn}}$$

folgt und diese Abschätzung sich nicht verbessern läßt. Diese Aussage ist völlig äquivalent damit, daß die genaue Größenbeschränkung von $A B^{-1}$ durch das Diagonalglied gegeben wird. Ist $B = E$, so kommen wir wieder auf den vorher behandelten Fall zurück.

Die bisherigen Ergebnisse lehren unmittelbar:

Satz 3. *Es sei A, B und C normal. Dann folgt aus $\mathfrak{M}(A B^{-1})$ und $Sp_0(A B^{-1})$, daß die genaue Größenbeschränkung von AC nach BC durch das Diagonalglied gegeben wird.*

Zusatz. Statt $Sp_0(A B^{-1})$ kann man auch $o(B) \leqq o(A)$ voraussetzen, d.h. aus $\tau_n = o(1)$ soll $\sigma_n = o(1)$ folgen. Werden nur Größenordnungen $0 < \eta_n \nearrow + \infty$ in Betracht gezogen, so kann die Voraussetzung Sp_0 weggelassen werden.

Als wichtiges neues Ergebnis erhalten wir

Satz 4. *Es sei B und C normal; weiter gelte $\mathfrak{M}(A)$ und $Sp_0(A)$; schließlich sei*

2(12) $$a_{n\nu} \neq 0, \qquad 0 \leqq \frac{b_{n\nu}}{a_{n\nu}} \nearrow \quad \textit{für} \quad \nu \nearrow \qquad (0 \leqq \nu \leqq n).$$

Dann wird die genaue Größenbeschränkung von AC nach BC durch das Diagonalglied gegeben.

Zusatz. Werden nur Größenordnungen $0 < \eta_n \nearrow + \infty$ in Betracht gezogen, so kann die Voraussetzung Sp_0 weggelassen werden.

Satz 4 enthält im wesentlichen die bisher gewonnenen Ergebnisse: Setzen wir z.B. $B = E$, so ist 2(12) schon erfüllt, wenn $a_{n\nu} > 0$ $(0 \leqq \nu \leqq n)$ ist. Wir erhalten so Satz 3 unter einer geringfügigen weiteren Voraussetzung. Ist weiter auch $C = E$, so kommen wir auf die Ergebnisse von § 2.1 zurück.

[10]) Vgl. PEYERIMHOFF [18], Satz 7.6; man setze z.B.

$$\sigma_n = S^{\delta}[s_\nu] = S^{1+\delta}[a_\nu] \quad (0 < \delta < 1).$$

Der *Beweis* von Satz 4 beruht auf dem Abelschen Lemma und dem Mittelwertsatz $\mathfrak{M}(A)$: O. B. d. A. kann $C = E$ gesetzt werden, da die genaue Größenbeschränkung nur vom Quotient der beiden Matrizen AC und BC abhängt. Aus 2(12) folgt

$$\tau_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{b_{n\nu}}{a_{n\nu}} a_{n\nu} s_\nu = \frac{b_{nn}}{a_{nn}} O\left(\sum_{\nu=n'}^{n} a_{n\nu} s_\nu \right) \quad (0 \leq n' \leq n)$$

$$= \frac{b_{nn}}{a_{nn}} o(\eta_n) \quad \text{bzw.} \quad = \frac{b_{nn}}{a_{nn}} O(\eta_n).$$

Ist η_n beschränkt (also konvergent), so ist bei der o-Abschätzung Lemma 9 heranzuziehen (vgl. Zusatz über Sp_0). Hiermit ist gezeigt, daß durch das Diagonalglied eine Größenbeschränkung gegeben wird. Diese läßt sich aber nach Lemma 11 nicht verbessern.

Wir formulieren noch ein einfaches Lemma über das Zusammensetzen von relativen Größenbeschränkungen.

Lemma 13. *Die Matrizen $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ seien normal, weiter gelte*

$$\left| \frac{a^{(2)}_{nn}}{a^{(1)}_{nn}} \right| \nearrow \quad \text{für } n \nearrow,$$

und die genauen Größenbeschränkungen von $A^{(1)}$ nach $A^{(2)}$ und $A^{(2)}$ nach $A^{(3)}$ seien durch die Diagonalglieder gegeben. Dann wird auch die genaue Größenbeschränkung von $A^{(1)}$ nach $A^{(3)}$ durch das Diagonalglied gegeben.

Der Beweis ist trivial.

Die Lage, die durch die Sätze 3, 4 und Lemma 13 entstanden ist, können wir ganz roh folgendermaßen skizzieren: Wir nehmen an, wir hätten zwei Matrizen $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$ und für den Quotienten von $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$ gelte der Mittelwertsatz, also

$$A^{(1)} = A\,C, \qquad A^{(2)} = C \quad \text{mit} \quad \mathfrak{M}(A).$$

Weiter sei $B^{(1)}$ eine weitgehend beliebige Matrix „zwischen" $A^{(1)}$ und $A^{(2)}$, etwa $B^{(1)} = BC$ (das Wort „zwischen" ist nicht weiter erklärt, da es sich hier nur um eine heuristische Überlegung handelt). Wir fragen uns, ob wir die genauen Größenbeschränkungen von $A^{(1)}$ nach allen diesen Matrizen $B^{(1)}$ angeben können. Die Sätze 3 und 4 besagen, daß dies unter gewissen, nicht sehr einschränkenden Voraussetzungen tatsächlich möglich ist. Wir können nun weiter von $A^{(2)}$ nach $A^{(3)}$ schließen, wobei wiederum der Quotient einen Mittelwertsatz haben soll. Durch Zusammensetzen (Lemma 13) finden wir dann auch die Größenbeschränkungen von $A^{(1)}$ nach den Matrizen $B^{(2)}$, die zwischen $A^{(2)}$ und $A^{(3)}$ liegen. So können wir fortfahren, und wenn beispielsweise $A^{(r)} = E$ ist, erhalten wir die genaue Größenbeschränkung von $A^{(1)}$ selbst wie von $A^{(1)}$ nach allen zwischen $A^{(1)}$ und E gelegenen Matrizen. Ein Beispiel für diesen Gedankengang ist

Satz 5. *Ist A ein Produkt von endlich vielen normalen Matrizen, von denen jede einzelne die Bedingungen Sp_0 und $\mathfrak{M}$ erfüllt und ein (dem Betrage nach)*

monoton fallendes Diagonalglied besitzt, so wird die genaue Größenbeschränkung von A und auch von $\overline{A}$ durch das Diagonalglied gegeben.

Zusatz. Werden nur Größenordnungen $0<\eta_n \nearrow +\infty$ in Betracht gezogen, so kann die Voraussetzung Sp_0 weggelassen werden.

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 3 und Lemma 13 und 12.

2.3. Anwendungen und Beispiele. Wir beginnen mit einer einfachen Anwendung von Satz 5:

Satz 6. *Die Matrix A sei normal, und es sei $|a_{nn}| \asymp$. Für ein r gelte $Sp_0(\Delta^r A)$ und $\mathfrak{M}(\Delta^r A)$.*

Dann wird die genaue Größenbeschränkung von A und auch von $\overline{A}$ durch das Diagonalglied gegeben.

Zusatz. Werden nur Größenordnungen $0<\eta_n \nearrow +\infty$ in Betracht gezogen, so kann die Voraussetzung Sp_0 weggelassen werden.

Der *Beweis* folgt einfach aus der Beziehung

$$A = \Delta^r A \cdot S^r = \Delta^r A \cdot (S^{\frac{1}{2}})^{2r},$$

wobei die Matrix $S^\varkappa$ $(\varkappa \geqq 0)$ durch die Transformation $S^\varkappa[s_\nu]$ definiert sein soll ($S^{\frac{1}{2}}$ erfüllt die Bedingung Sp_0). Dieses Ergebnis hätten wir auch durch wiederholte Anwendung von Lemma 12 zusammen mit Lemma 10 und 11 erhalten können.

Im Falle der gewöhnlichen CESÀROschen Mittel $A = S^\varkappa$ sind die Voraussetzungen von Satz 6 (mit $r = [\varkappa]$) erfüllt, und die genaue Größenbeschränkung ist gleich 1.

Statt der gewöhnlichen Differenzen kann man auch die Differenzen $\Delta/\Delta\lambda$ benutzen. Man erhält dann ein zu Satz 6 analoges Ergebnis. Wir wollen in dieser Richtung der Einfachheit halber nur den folgenden Satz aufstellen:

Satz 7. *Es sei*

$$\Delta\lambda_{n+1} = O(\Delta\lambda_n), \qquad 0<\eta_n \nearrow +\infty, \quad \frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^\varkappa} \asymp .$$

Dann folgt für alle $0 \leq \varrho \leq \varkappa$ aus

$$C_n^\varkappa = o(\eta_n) \quad \text{bzw.} \quad C_n^\varkappa = O(\eta_n)$$

entsprechend

$$C_n^\varrho = o(\eta_n)\,|\Delta\lambda_n|^\varrho \quad \text{bzw.} \quad C_n^\varrho = O(\eta_n)\,|\Delta\lambda_n|^\varrho,$$

und diese Abschätzung läßt sich nicht verbessern. Weiter haben die Reihenglieder a_n die gleiche genaue Größenbeschränkung wie die Teilsummen $s_n = C_n^0$.

Zusatz. Auf Grund des Äquivalenzsatzes gelten (unter geeigneten Voraussetzungen) für die entsprechenden RIESZschen Mittel die gleichen Größenbeschränkungen und diese lassen sich nicht verbessern, wenn wir zum Vergleich nur Größenbeschränkungen mit $0<g_n \nearrow$ zulassen.

Daß bei den allgemeinen CESÀROschen Mitteln diese Größenbeschränkungen bestehen, ist uns nicht neu (vgl. Lemma 6). Ergänzend ist also nur hinzugekommen, daß dies auch die genauen Größenbeschränkungen sind. Man vergleiche im Falle $\varrho = 0$, $\eta_n = \lambda_{n+1}^\varkappa$ hierzu JURKAT [9], Satz 5.

Wir zeigen jetzt, daß Satz 7 in vollem Umfang in der entwickelten Theorie enthalten ist: Die Matrix $C^\varkappa$ sei durch die Transformation $C^\varkappa[s_\nu]$ definiert. Das Diagonalglied dieser Matrix hat unter den obengenannten Voraussetzungen die genaue Größenordnung $\Delta\lambda_n^\varkappa$. Wir haben also zu beweisen, daß die genaue Größenbeschränkung von $C^\varkappa$ nach C^ϱ durch das Diagonalglied gegeben wird (wobei natürlich die zugelassenen Größenordnungen η_n die obigen Voraussetzungen erfüllen sollen). Die Größenbeschränkung überträgt sich dann von den Teilsummen auf die Reihenglieder (Lemma 12).

Nach dem Prinzip von Lemma 13 können wir für den *Beweis* $r \leqq \varrho < \varkappa \leqq r+1$ (r ganz, $\geqq 0$) annehmen[11]).

Zunächst sei $\varrho > r$. Dann gibt es nach 1(13) eine normale Matrix C, so daß

$$C^\varkappa = C^{\varkappa-r}C, \qquad C^\varrho = C^{\varrho-r}C$$

ist. Setzen wir $A = C^{\varkappa-r}$ und $B = C^{\varrho-r}$, so sind die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt: Nach dem zweiten Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist nämlich

$$\frac{b_{n\nu}}{a_{n\nu}} = \frac{\Gamma(\varkappa-r+1)}{\Gamma(\varrho-r+1)} \frac{\Delta_\nu(\lambda_{n+1}-\lambda_\nu)^{\varrho-r}}{\Delta_\nu(\lambda_{n+1}-\lambda_\nu)^{\varkappa-r}} = \frac{\Gamma(\varkappa-r)}{\Gamma(\varrho-r)} \frac{(\lambda_{n+1}-\tau_\nu)^{\varrho-r-1}}{(\lambda_{n+1}-\tau_\nu)^{\varkappa-r-1}}$$

mit einem passenden τ_ν zwischen λ_ν und $\lambda_{\nu+1}$. Also wächst $b_{n\nu}\,a_{n\nu}$ monoton mit ν. Die anderen Bedingungen sind auch erfüllt (die Voraussetzung Sp_0 fällt wegen $0<\eta_n\nearrow+\infty$ weg).

Ist $\varrho = r$, so folgt wegen 1(13) nach Satz 3, daß die genaue Größenbeschränkung von $C^\varkappa = C^{\varkappa-r}C$ nach C durch das Diagonalglied gegeben wird. Die durch C und C^r definierten Transformationen haben aber die gleiche Größenordnung, und dasselbe gilt für ihre Diagonalglieder. Also wird auch die genaue Größenbeschränkung von $C^\varkappa$ nach C^r durch das Diagonalglied gegeben.

Damit ist Satz 7 vollständig bewiesen.

Weitere Anwendungen der Theorie ergeben sich bei den arithmetischen Mitteln $M(p_n)$ und den Nörlundschen Mitteln $N(p_n)$. Es können folgende relative Größenbeschränkungen untersucht werden:

a) von $M(p_n)$ nach $M(q_n)$, b) von $M(p_n)$ nach $N(q_n)$,

c) von $N(p_n)$ nach $M(q_n)$, d) von $N(p_n)$ nach $N(q_n)$.

Einfache hinreichende Bedingungen dafür, daß die genauen Größenbeschränkungen durch die Diagonalglieder gegeben werden, erhält man aus Satz 4. In den Fällen a) und c) kann man auch Satz 3 heranziehen (vgl. die Parallele zu Satz 6). Wir können die Aufstellung der Bedingungen der Einfachheit wegen dem Leser überlassen.

Als ein letztes Beispiel für die Anwendung unserer Theorie betrachten wir die Matrizen $R_\lambda^\delta = C^\delta$ und $R_{\Phi(\lambda)}^\delta$, die durch die Transformationen

$$\frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\sum_{\nu=0}^{n}\Delta_\nu(\lambda_{n+1}-\lambda_\nu)^\delta s_\nu \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\Gamma(\delta+1)}\sum_{\nu=0}^{n}\Delta_\nu[\Phi(\lambda_{n+1})-\Phi(\lambda_\nu)]^\delta s_\nu$$

[11]) Man vgl. hierzu die im Anschluß an Lemma 13 gemachten Bemerkungen und berücksichtige 1(26).

definiert seien. Es handelt sich also um zwei verschiedene unstetige RIESZsche Mittel der gleichen Ordnung. Die Funktion $\Phi(x)$ möge dabei folgende Bedingungen erfüllen:

$$0 \leqq \Phi(x) \to \infty \quad (x \to \infty), \tag{2(13)}$$

$$\Phi'(x) > 0, \quad \Phi''(x) \leqq 0 \quad \text{für} \quad x \geqq 0, \tag{2(14)}$$

$$\left|\frac{\Phi''(x)}{\Phi'(x)}\right| \searrow \quad \text{für} \quad x \nearrow . \tag{2(15)}$$

Ist z. B. $\Phi(x)$ eine L-Funktion im Sinne von HARDY [4], S. 17 mit den Eigenschaften

$$\Phi(x) \to \infty, \qquad \Phi(x) = o(x) \quad (x \to \infty), \tag{2(16)}$$

so sind die Bedingungen 2(13) bis (15) für alle großen x erfüllt, und hierauf wird es im folgenden nur ankommen.

Satz 8. *Die Funktion $\Phi(x)$ erfülle die Bedingungen 2(13) bis (15), für die zugelassenen Größenordnungen gelte $0 < \eta_n \nearrow +\infty$, schließlich sei $0 < \delta \leqq 1$. Dann ist die genaue Größenbeschränkung von $R^{\delta}_{\Phi(\lambda)}$ nach R^{δ}_{λ} gleich*

$$\left[\frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\lambda_n)}\right]^{\delta}, \tag{2(17)}$$

wird also durch das Diagonalglied gegeben.

Zusatz. Es genügt, wenn $\Phi(x)$ die Bedingungen 2(13) bis (15) nur für alle großen x erfüllt. Die Größenbeschränkung 2(17) kann auch durch

$$[\Phi'(\lambda_{n+1})]^{-\delta} \tag{2(18)}$$

ersetzt werden, und 2(18) läßt sich nicht verbessern, wenn λ_n nicht zu stark anwächst. Für die stetigen RIESZschen Mittel gilt nach Lemma 5 die gleiche genaue Größenbeschränkung, wenn wir zum Vergleich nur monotone Größenbeschränkungen zulassen.

Zum *Beweis* von Satz 8 zeigen wir, daß die Voraussetzungen von Satz 4 mit $A = R^{\delta}_{\Phi(\lambda)}$, $B = R^{\delta}_{\lambda}$, $C = E$ erfüllt sind. Dies folgt aber sofort aus

Lemma 14. *Gilt 2(13) bis (15), so ist*

$$\frac{b_{n\nu}}{a_{n\nu}} = \frac{\Delta_\nu[\lambda_{n+1} - \lambda_\nu]^{\delta}}{\Delta_\nu[\Phi(\lambda_{n+1}) - \Phi(\lambda_\nu)]^{\delta}} \nearrow \quad \text{für} \quad \nu \nearrow \quad (0 \leqq \nu \leqq n).$$

(JURKAT-PEYERIMHOFF [12], Lemma 8.)

Der Zusatz zu Satz 8 folgt aus der Tatsache, daß eine Änderung der Φ-Werte für beschränkte x oder Hinzufügen einer Konstanten zu $\Phi(x)$ auf die Gültigkeit der Größenbeschränkung keinen Einfluß hat. Die weiteren Bemerkungen sind klar.

3. Konvergenzfaktoren für Matrixtransformationen.

Wir wenden uns jetzt der Aufstellung von Konvergenzfaktoren zu. Auch hier spielen wieder die Matrizen mit Mittelwertsatz eine wichtige Rolle. Wir stellen im folgenden zuerst die für unseren Zweck wichtigen Eigenschaften dieser Matrizen zusammen und werden dann zu Verallgemeinerungen übergehen.

3.1. Matrizen mit Mittelwertsatz. Die früheren Ergebnisse führen wir in leicht verallgemeinerter Form an:

Lemma 15. *Die Matrix A sei normal, und es gelte $Sp_0(A)$. Notwendig dafür, daß aus*

3 (1) $$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu = o(\eta_n) \quad mit \quad 0 < \eta_n \nearrow$$

stets die Konvergenz der Reihe

3 (2) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \varepsilon_\nu$$

folgt, sind die beiden nachstehenden Bedingungen:
(F) *Die Zahlen ε_ν lassen sich darstellen in der Form*

$$\varepsilon_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} \quad mit \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n \eta_n| < \infty;$$

(G) $$\varepsilon_\nu = O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) a_{\nu\nu}.$$

Unter der zusätzlichen Voraussetzung $\mathfrak{M}(A)$ ist die Bedingung (F) *allein schon hinreichend.*

Zusatz. Ersetzt man bei 3 (1) das Symbol o durch O, so bleibt (F) ungeändert und bei (G) ist O mit o zu vertauschen. Die Voraussetzung $Sp_0(A)$ kann in beiden Fällen durch

$$a_{n\nu} = o(\eta_n) \quad \text{für} \quad n \to \infty, \quad \nu \text{ fest}$$

ersetzt werden. Die Notwendigkeit der Bedingung (G) folgt auch ohne die Voraussetzung $Sp_0(A)$.

Lemma 16. *Die Matrix A sei normal, und es gelte $Sp_0(A)$. Notwendig dafür, daß aus*

3 (3) $$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} \bar{a}_{n\nu} a_\nu = o(\eta_n) \quad mit \quad 0 < \eta_n \nearrow$$

stets die Konvergenz der Reihe

3 (4) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu$$

folgt, sind die beiden nachstehenden Bedingungen:
($\overline{\text{F}}$) *Es gilt die Darstellung*

$$A_\nu \bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n a_{n\nu} \quad mit \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n \eta_n| < \infty$$

oder auch (falls die folgende Darstellung konvergiert)

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \alpha + \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \bar{a}_{n\nu} \quad mit\ passendem\ \alpha;$$

($\overline{\text{G}}$) $$\bar{\varepsilon}_\nu = O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) a_{\nu\nu}.$$

Unter der zusätzlichen Voraussetzung $\mathfrak{M}(A)$ *sind die Bedingungen* $(\overline{\mathrm{F}})$ *und* $(\overline{\mathrm{G}})$ *zusammen auch hinreichend.*

Zusatz. Ersetzt man bei 3(3) das Symbol o durch O, so bleibt $(\overline{\mathrm{F}})$ ungeändert und bei $(\overline{\mathrm{G}})$ ist O mit o zu vertauschen. Die Voraussetzung $Sp_0(A)$ kann in beiden Fällen durch

$$a_{n\nu} = o(\eta_n) \quad \text{für} \quad n \to \infty, \qquad \nu \text{ fest}$$

ersetzt werden. Die Notwendigkeit der Bedingung $(\overline{\mathrm{G}})$ folgt auch ohne die Voraussetzung $Sp_0(A)$.

Zu dem *Beweis* von Lemma 15 und 16 vergleiche man PEYERIMHOFF [18], Satz 3.6, 5.3, 5.6 und JURKAT-PEYERIMHOFF [11], Satz 10. Gewisse Voraussetzungen, die dort nicht nötig waren, sind weggelassen. Weiter ist die Größenordnung η_n an Stelle von $\eta_n = 1$ eingeführt worden.

Die Notwendigkeit der Bedingungen (G) und $(\overline{\mathrm{G}})$ folgt aus

3(5) $$s_\nu \varepsilon_\nu = o(1) \quad \text{bzw.} \quad a_\nu \bar{\varepsilon}_\nu = o(1).$$

Lemma 11 ist in diesem Fall nicht direkt anwendbar, aber wir können ganz analog schließen: Es sei $A^{-1} = (a'_{n\nu})$, also

$$s_n \varepsilon_n = \sum_{\nu=0}^{n} a'_{n\nu} \varepsilon_n \eta_\nu \cdot \frac{\sigma_\nu}{\eta_\nu} = o(1) \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Da σ_ν/η_ν eine beliebige Nullfolge sein kann, folgt nach dem TOEPLITZschen Satz

$$a'_{n\nu} \varepsilon_n \eta_\nu|_{\nu=n} = O(1), \qquad \text{d.h.} \quad \varepsilon_n = O\left(\frac{1}{\eta_n}\right) a_{nn}.$$

Entsprechendes gilt für $\bar{\varepsilon}_\nu$.

Die Zusätze beziehen sich im wesentlichen auf die Vertauschung von o mit O. Dabei werden die Forderungen 3(1) und 3(3) schwächer, also 3(2) und 3(4) stärker. Die Bedingungen (F) und $(\overline{\mathrm{F}})$ bleiben daher notwendig. Bei den Bedingungen (G) und $(\overline{\mathrm{G}})$ ist O durch o zu ersetzen, wie man der oben angestellten Rechnung entnehmen kann. Der hinreichende Teil der früheren Beweise bleibt mit entsprechenden Änderungen gültig. Man vergleiche auch den Beweis von Satz 9 $(A = E)$ dieser Arbeit.

Liegt der Sachverhalt von Lemma 15 vor, d.h. folgt aus 3(1) bei fester Zahlenfolge η_n stets die Konvergenz der Reihe 3(2), so wollen wir die Zahlen ε_ν als „o-Konvergenzfaktoren für A (zur Größenordnung η_n)" bezeichnen. Ist bei 3(1) das Symbol o durch O ersetzt, so sprechen wir von „O-Konvergenzfaktoren (zur Größenordnung η_n)". Entsprechend bezeichnen wir die Zahlen $\bar{\varepsilon}_\nu$ von Lemma 16 als o- bzw. O-Konvergenzfaktoren für $\bar{A}$.

Für Matrizen, die einen Mittelwertsatz erfüllen, gibt Lemma 15 und 16 einen vollständigen Überblick über alle Konvergenzfaktoren. Bemerkenswert ist der Zusammenhang $\Delta\bar{\varepsilon}_\nu = \varepsilon_\nu$ zwischen den Bedingungen (F) und $(\overline{\mathrm{F}})$, ferner die Übereinstimmung der Größenbeschränkungen bei (G) und $(\overline{\mathrm{G}})$.

Wir nennen zwei Beispiele[12]) für die Anwendung von Lemma 15 und 16:

Lemma 17. *Es sei* $0<\eta_n \nearrow +\infty$.

Die Gesamtheit der o- und O-Konvergenzfaktoren für die Cesàroschen *Mittel* $(A=S^\delta,\ 0<\delta\leqq 1)$ *wird in der FF-Form durch die Bedingungen* (F) *und* (G) *und in der RF-Form durch die Bedingungen* $(\overline{\mathrm{F}})$ *und* $(\overline{\mathrm{G}})$ *gegeben:*

$$\text{(F)}\qquad \varepsilon_\nu=\sum_{n=\nu}^{\infty}\alpha_n\binom{n-\nu+\delta-1}{n-\nu}=\Delta^{-\delta}\alpha_\nu \quad mit \quad \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n\eta_n|<\infty,$$

$$\text{(G)}\qquad \varepsilon_\nu=O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) \quad bzw. \quad \varepsilon_\nu=o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right);$$

$$(\overline{\mathrm{F}})\qquad \Delta\bar{\varepsilon}_\nu=\Delta^{-\delta}\alpha_\nu \quad mit \quad \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n\eta_n|<\infty,$$

$$(\overline{\mathrm{G}})\qquad \bar{\varepsilon}_\nu=O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) \quad bzw. \quad \bar{\varepsilon}_\nu=o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right).$$

Zusatz. Die Bedingungen (F) und $(\overline{\mathrm{F}})$ lassen sich nach α_n auflösen und lauten dann

$$\sum_{n=0}^{\infty}\eta_n|\Delta^\delta\varepsilon_n|<\infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\eta_n|\Delta^{\delta+1}\bar{\varepsilon}_n|<\infty.$$

Die aufgelösten Bedingungen sind zusammen mit (G) bzw. $(\overline{\mathrm{G}})$ wieder notwendig und hinreichend.

Lemma 18. *Es sei* $0<\eta_n \nearrow +\infty$.

Die Gesamtheit der o- und O-Konvergenzfaktoren für die (unstetigen) Rieszschen *Mittel* $(A=R^\delta_\lambda,\ 0<\delta\leqq 1)$ *wird in der FF-Form durch die Bedingungen* (F) *und* (G) *und in der RF-Form durch die Bedingungen* $(\overline{\mathrm{F}})$ *und* $(\overline{\mathrm{G}})$ *gegeben:*

$$\text{(F)}\qquad \varepsilon_\nu=\sum_{n=\nu}^{\infty}\alpha_n\Delta_\nu(\lambda_{n+1}-\lambda_\nu)^\delta \quad mit \quad \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n\eta_n|<\infty,$$

$$\text{(G)}\qquad \varepsilon_\nu=O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right)|\Delta\lambda_\nu|^\delta \quad bzw. \quad \varepsilon_\nu=o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right)|\Delta\lambda_\nu|^\delta;$$

$$(\overline{\mathrm{F}})\qquad \Delta\bar{\varepsilon}_\nu=\sum_{n=\nu}^{\infty}\alpha_n\Delta_\nu(\lambda_{n+1}-\lambda_\nu)^\delta \quad mit \quad \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n\eta_n|<\infty,$$

$$(\overline{\mathrm{G}})\qquad \bar{\varepsilon}_\nu=O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right)|\Delta\lambda_\nu|^\delta \quad bzw. \quad \bar{\varepsilon}_\nu=o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right)|\Delta\lambda_\nu|^\delta.$$

Zusatz. Die Bedingungen (F) und $(\overline{\mathrm{F}})$ lassen sich für $\delta=1$ nach α_n auflösen und lauten dann

$$\sum_{n=0}^{\infty}\eta_n\left|\Delta\left(\frac{\varepsilon_n}{\Delta\lambda_n}\right)\right|<\infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\eta_n\,\Delta\left(\frac{\Delta\bar{\varepsilon}_n}{\Delta\lambda_n}\right)<\infty.$$

Die aufgelösten Bedingungen sind zusammen mit (G) bzw. $(\overline{\mathrm{G}})$ wieder notwendig und hinreichend, falls noch zusätzlich $\Delta\lambda_{n+1}=O(\Delta\lambda_n)$ vorausgesetzt wird.

[12]) Man vgl. Jurkat-Peyerimhoff [11], § 7 und die dort zitierten Arbeiten.

3.2. Zusammensetzen von Konvergenzfaktoren. Unsere bisherigen Ergebnisse geben uns nur für die Matrizen mit Mittelwertsatz einen vollständigen Überblick über die Konvergenzfaktoren. Es gibt aber Beispiele, in denen unsere Bedingungen (F), (G) bzw. $(\overline{\text{F}})$, $(\overline{\text{G}})$ notwendig und hinreichend sind, obwohl der Mittelwertsatz nicht gilt. Diese Beispiele legen eine Untersuchung der Iteration der bisherigen Transformationen nahe: Es sei $\mathfrak{C}$ ein Matrixverfahren, das in der FF-Form oder RF-Form durch $C = AB$ bzw. $\overline{C} = A\overline{B}$ gegeben sei. Dann entsteht die Frage, ob man nicht auf Grund der Kenntnis der Konvergenzfaktoren für A und $\mathfrak{B}$ die Konvergenzfaktoren für $\mathfrak{C}$ angeben kann.

Wir beginnen mit einer einfachen Bemerkung über das Zusammensetzen von Konvergenzfaktoren. (Die fehlenden Voraussetzungen wird der Leser leicht ergänzen können.)

Die o- und O-Konvergenzfaktoren für $\mathfrak{C}$ erfüllen die Bedingungen

$$\text{(F)} \quad \gamma_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n c_{n\nu} \qquad \text{bzw.} \qquad (\overline{\text{F}}) \quad \Delta\bar{\gamma}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n c_{n\nu}$$

mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n \eta_n| < \infty.$$

Setzen wir

$$3\,(6) \qquad \varepsilon_k = \sum_{n=k}^{\infty} \alpha_n a_{nk},$$

so gehen (F) und $(\overline{\text{F}})$ über in

$$3\,(7) \qquad \gamma_\nu = \sum_{k=\nu}^{\infty} \varepsilon_k b_{k\nu} \qquad \text{bzw.} \qquad \Delta\bar{\gamma}_\nu = \sum_{k=\nu}^{\infty} \varepsilon_k b_{k\nu}.$$

Dies beruht auf der Gleichung

$$c_{n\nu} = \sum_{k=\nu}^{n} a_{nk} b_{k\nu}.$$

Die Bedingungen 3 (7) haben den gleichen Aufbau wie die der Konvergenzfaktoren für $\mathfrak{B}$. Die zur Darstellung der Konvergenzfaktoren benutzten Zahlen ε_k sind aber nach 3 (6) selbst wieder „Konvergenzfaktoren“[13]), und zwar gerade die „Konvergenzfaktoren“ für A, die zu der gleichen Größenordnung η_n gehören. Die Bedingungen 3 (7) können auch nach ε_k aufgelöst sein; das ändert an diesem Prinzip des Zusammensetzens nichts.

Wir haben hier nur die notwendigen Bedingungen (F) und $(\overline{\text{F}})$ auf eine andere Form gebracht, erhalten also in 3 (6) und 3 (7) auch nur notwendige Bedingungen. Nehmen wir zu 3 (6) und 3 (7) noch die Bedingungen

$$\text{(G)} \qquad \gamma_\nu = O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) a_{\nu\nu} b_{\nu\nu} \qquad \text{bzw.} \qquad \gamma_\nu = o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) a_{\nu\nu} b_{\nu\nu}$$

und

$$(\overline{\text{G}}) \qquad \bar{\gamma}_\nu = O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) a_{\nu\nu} b_{\nu\nu} \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{\gamma}_\nu = o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) a_{\nu\nu} b_{\nu\nu}$$

[13]) Aus 3 (6) braucht im allgemeinen nicht zu folgen, daß die Zahlen ε_k wirklich Konvergenzfaktoren sind, es sei denn, daß für A der Mittelwertsatz gilt. Sie haben nur die gleiche Darstellung wie die Konvergenzfaktoren.

hinzu, so bleibt es durchaus noch offen, ob wir dadurch tatsächlich die Konvergenzfaktoren für $\mathfrak{C}$ erhalten – auch wenn wir von den ε_k verlangen, daß sie wirklich Konvergenzfaktoren für A sein sollen. Man kann aber vermuten, daß sich auf diese Weise die Konvergenzfaktoren für alle endlichen Produkte von Matrizen mit Mittelwertsatz bestimmen lassen werden. Die folgenden Sätze sollen ein erster Schritt in Richtung auf dieses Ziel sein.

Satz 9. *Die Matrizen A und B seien normal; die genaue Größenbeschränkung von A werde durch das Diagonalglied gegeben, und dieses falle (dem Betrage nach) monoton; die Matrix B erfülle $\mathfrak{M}(B)$ und $Sp_0(B)$.*

Dann ist jedenfalls die folgende Darstellung hinreichend für o- und O-Konvergenzfaktoren

$$\text{für } C = AB: \qquad \gamma_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \varepsilon_n b_{n\nu} \quad \text{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left| \varepsilon_n \frac{\eta_n}{a_{nn}} \right| < \infty,$$

$$\text{für } \overline{C} = A\overline{B}: \quad \begin{cases} \Delta\bar{\gamma}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \varepsilon_n b_{n\nu} \quad \text{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left| \varepsilon_n \frac{\eta_n}{a_{nn}} \right| < \infty, \\ \bar{\gamma}_\nu = O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) a_{\nu\nu} b_{\nu\nu} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\gamma}_\nu = o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) a_{\nu\nu} b_{\nu\nu}. \end{cases}$$

(Es wird natürlich vorausgesetzt, daß die Darstellungen konvergieren.)

Zusatz. Werden nur Größenordnungen $0 < \eta_n \nearrow + \infty$ in Betracht gezogen, so kann die Voraussetzung $Sp_0(B)$ weggelassen werden.

Dieser Satz enthält für $A = E$ den hinreichenden Teil von Lemma 15 und 16. Wir bemerken weiter, daß die Zahlen ε_n Konvergenzfaktoren für A sind, ganz im Sinne des vorher erläuterten Prinzips vom Zusammensetzen der Konvergenzfaktoren.

Der *Beweis* beruht darauf, daß aus der Größenordnung η_n der $\mathfrak{C}$-Transformation sich für die $\mathfrak{B}$-Transformation die Größenordnung η_n/a_{nn} ergibt. Daraus folgt, daß die Konvergenzfaktoren für $\mathfrak{B}$, die zu der Größenordnung η_n/a_{nn} gehören, erst recht Konvergenzfaktoren für $\mathfrak{C}$ sein müssen.

Auf Grund des Mittelwertsatzes können wir aber auch direkt schließen:

$$\sum_{\nu=0}^{k} s_\nu \gamma_\nu = \sum_{n=0}^{k} \varepsilon_n \sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu} s_\nu + \sum_{n=k+1}^{\infty} \varepsilon_n \sum_{\nu=0}^{k} b_{n\nu} s_\nu$$
$$= \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

Die Summe I ist die k-te Teilsumme der absolut konvergenten Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n O\left(\frac{\eta_n}{a_{nn}}\right),$$

und für die Summe II gilt

$$\mathrm{II} = O(1) \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \varepsilon_n \frac{\eta_n}{a_{nn}} \right| = o(1).$$

Der Beweis für $\overline{C}$ kann auf diesen durch partielle Summation zurückgeführt werden (man benutze Lemma 10).

Satz 9 liefert in manchen Fällen recht einfache hinreichende Bedingungen für Konvergenzfaktoren. Zum Beispiel kann man für $\mathfrak{B}$ die (unstetigen) RIESZschen Mittel 1. Ordnung nehmen. Dann lassen sich nach dem Zusatz zu Lemma 18 die Konvergenzfaktorenbedingungen nach ε_n auflösen. So gewinnt man einen neuen Zugang zu den Ergebnissen von JURKAT [9], § 2. Andere einfache Beispiele lassen sich leicht bilden.

Bei Satz 9 haben wir einen relativ großen Anwendungsbereich, dafür aber nur hinreichende Bedingungen. Anders steht es bei einem Typ von Matrizen, den wir von Satz 6 her kennen.

Satz 10. *Die Matrix C sei normal, und es sei $|c_{nn}| \searrow$; weiter gelte $\mathfrak{M}(\Delta^r C)$ und $Sp_0(\Delta^r C)$. Dann wird die Gesamtheit der o- und O-Konvergenzfaktoren für C durch die Bedingungen* (F) *und* (G) *und für $\overline{C}$ durch die Bedingungen* ($\overline{\text{F}}$) *und* ($\overline{\text{G}}$) *gegeben:*

(F) $$\Delta^r \gamma_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \Delta_\nu^r c_{n\nu} \quad \textit{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n \eta_n| < \infty,$$

(G) $$\gamma_\nu = O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) c_{\nu\nu} \quad \textit{bzw.} \quad \gamma_\nu = o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) c_{\nu\nu};$$

($\overline{\text{F}}$) $$\Delta^{r+1} \bar{\gamma}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \Delta_\nu^r c_{n\nu} \quad \textit{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n \eta_n| < \infty,$$

($\overline{\text{G}}$) $$\bar{\gamma}_\nu = O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) c_{\nu\nu} \quad \textit{bzw.} \quad \bar{\gamma}_\nu = o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right) c_{\nu\nu}.$$

Zusatz. Die Voraussetzung $Sp_0(\Delta^r C)$ kann durch

$$\Delta_\nu^r c_{n\nu} = o(\eta_n) \quad \text{für} \quad n \to \infty, \quad \nu \text{ fest}$$

ersetzt werden.

Dieser Satz gibt für $r = 0$ die gleiche Darstellung der Konvergenzfaktoren wie Lemma 15 und 16. Setzen wir

$$C = AB \quad \text{mit} \quad A = \Delta^r C, \qquad B = S^r,$$

so erkennen wir, daß $\Delta^r \gamma_\nu = \varepsilon_\nu$ gerade die nach ε_ν aufgelöste Bedingung 3 (7) ist und daß die Zahlen ε_ν Konvergenzfaktoren für A sind, ganz im Sinne des eingangs erläuterten Prinzips vom Zusammensetzen der Konvergenzfaktoren.

Der *Beweis* beruht auf einer r-maligen partiellen Summation:

3 (8) $$\sum_{\nu=0}^{k} s_\nu \gamma_\nu = \sum_{\varrho=0}^{r-1} S_{k-\varrho}^{\varrho+1} \Delta^\varrho \gamma_{k-\varrho} + \sum_{\nu=0}^{k-r} S_\nu^r \Delta^r \gamma_\nu$$
$$= \mathrm{I} + \mathrm{II}.$$

Wir wissen von Lemma 15 her, daß (G) eine notwendige Bedingung für die Konvergenz von 3 (8) ist. Also gilt auch

$$\Delta^\varrho \gamma_k = O\left(\frac{1}{\eta_k}\right) c_{kk} \quad \text{bzw.} \quad \Delta^\varrho \gamma_k = o\left(\frac{1}{\eta_k}\right) c_{kk}.$$

Andererseits ist nach Satz 6 die genaue Größenbeschränkung von C nach S^ϱ $(0 \leq \varrho \leq r)$ gleich $1/c_{n\,n}$. Daraus folgt ersichtlich

$$\mathrm{I} = o(1) \quad \text{für} \quad k \to \infty,$$

so daß unter der Voraussetzung (G) die Konvergenz von 3 (8) gleichbedeutend ist mit der Konvergenz von II. Dies besagt aber nichts anderes, als daß die Zahlen $\Delta^r \gamma_\nu$ Konvergenzfaktoren für $\Delta^r C$ sein sollen, d.h. nach Lemma 15, daß (F) gelten soll. (F) und (G) sind also zusammen notwendige und hinreichende Bedingungen. Die Aussage über die Konvergenzfaktoren für $\overline{C}$ folgt aus dem bisherigen Beweis wegen $\Delta^{r+1}\overline{C} = \Delta^r C$.

Satz 10 läßt sich unmittelbar auf die Cesàroschen Mittel beliebiger Ordnung $(C = S^\varkappa, \varkappa > 0)$ anwenden. Die Bedingungen lauten in aufgelöster Form

für C: $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n |\Delta^\varkappa \gamma_n| < \infty, \qquad \gamma_n = O\left(\frac{1}{\eta_n}\right) \quad \text{bzw.} \quad \gamma_n = o\left(\frac{1}{\eta_n}\right);$

für $\overline{C}$: $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n |\Delta^{\varkappa+1} \bar{\gamma}_n| < \infty, \qquad \bar{\gamma}_n = O\left(\frac{1}{\eta_n}\right) \quad \text{bzw.} \quad \bar{\gamma}_n = o\left(\frac{1}{\eta_n}\right).$

Dies ist eine Verallgemeinerung von Lemma 17.

Bei der bisherigen Betrachtung haben wir die gewöhnlichen Differenzen bevorzugt. Wir können aber auch mit den allgemeinen Differenzen $\Delta/\Delta\lambda$ arbeiten und erhalten dann ähnliche Ergebnisse. Der Einfachheit halber beschränken wir uns im folgenden auf die Anwendungen bei Rieszschen Mitteln, die besondere Bedeutung haben.

3.3. Die Konvergenzfaktoren für Rieszsche Mittel beliebiger Ordnung. Wir wollen uns jetzt der Bestimmung der Konvergenzfaktoren für die Rieszschen Mittel zuwenden. Bisher waren genaue Bedingungen nur bekannt für die Ordnungen $0 < \varkappa \leq 1$ und darüber hinaus nur hinreichende Bedingungen[14]). Die auftretenden Schwierigkeiten liegen zu einem Teil an dem stetigen Parameter der Rieszschen Mittel. Für $0 < \varkappa \leq 1$ sind aber die stetigen Mittel mit den unstetigen äquivalent, und daher genügt es, die Konvergenzfaktoren für diese zu kennen. Dieser Gedanke läßt sich sofort verallgemeinern: Auf Grund unseres Äquivalenzsatzes sind (unter gewissen Voraussetzungen) die Konvergenzfaktoren für die Rieszschen Mittel auch Konvergenzfaktoren für die allgemeinen Cesàroschen Mittel und umgekehrt. Damit werden wir nun einen Zugang zu den Konvergenzfaktoren für die Rieszschen Mittel beliebiger Ordnung finden.

Die allgemeinen Cesàroschen Mittel waren in § 1.1 durch die Transformation $C^\varkappa[s_\nu]$ definiert, und wir hatten $\varkappa = k + \delta$ (k ganz, ≥ 0; $0 < \delta \leq 1$) gesetzt. Die vermittelnde Matrix bezeichnen wir wieder[15]) mit $C^\varkappa$; insbesondere ist $C^\delta = R^\delta_\lambda$.

[14]) Man vgl. Jurkat [9], §§ 1,2; Peyerimhoff [18], § 9; Jurkat-Peyerimhoff [11], § 7; vgl. weiter Lemma 18 und Satz 9 dieser Arbeit.

[15]) Vgl. die Bezeichnungen bei Satz 7 und 8.

Satz 11. *Es sei (wie bei Satz 7)*

$$\Delta\lambda_{n+1} = O(\Delta\lambda_n), \qquad 0 < \eta_n \nearrow +\infty, \qquad \frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^\varkappa} \nearrow .$$

Dann wird die Gesamtheit der o- und O-Konvergenzfaktoren für die allgemeinen CESÀROschen *Mittel in der FF-Form (d.h. für $C^\varkappa$) durch die Bedingungen* (F) *und* (G) *gegeben:*

(F) *Schreiben wir $\gamma_\nu = \Delta\bar{\gamma}_\nu$, so gilt die Darstellung*

$$|\Delta\lambda_\nu| \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^{k+1} \bar{\gamma}_\nu = \varepsilon_\nu ,$$

wobei die ε_ν o- bzw. O-Konvergenzfaktoren für $C^\delta = R_\lambda^\delta$ (zur Größenordnung η_n) sind;

(G) $$\gamma_\nu = O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right)|\Delta\lambda_\nu|^\varkappa \quad \text{bzw.} \quad \gamma_\nu = o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right)|\Delta\lambda_\nu|^\varkappa .$$

Zusatz. Nach Lemma 18 können wir die Bedingung (F) ersetzen durch

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^{k+1} \bar{\gamma}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu (\lambda_{n+1} - \lambda_\nu)^\delta \quad \text{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n \eta_n| < \infty .$$

Ist $\varkappa$ ganzzahlig, also $\delta = 1$, so können wir die aufgelösten Bedingungen für ε_ν benutzen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \left| \Delta \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_n^\varkappa \bar{\gamma}_n \right| < \infty .$$

Jede dieser Bedingungen ist zusammen mit (G) wieder notwendig und hinreichend.

Bei Satz 11 bestätigt sich erneut das früher erläuterte Prinzip vom Zusammensetzen der Konvergenzfaktoren. Betrachten wir nämlich die Produktdarstellung

1 (13) $$C^\varkappa[s_\nu] = C^\delta\left[\frac{1}{k+1} \frac{\lambda_{\nu+k+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu} C_\nu^k\right]$$

für $C^\varkappa$, so erkennen wir in (F) die nach ε_ν aufgelöste Bedingung 3 (7) wieder.

Der *Beweis* geht von der nach Lemma 3 gültigen Formel 3 (9) aus ($\gamma_\nu = \Delta\bar{\gamma}_\nu$):

3 (9) $$\sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu \gamma_\nu = \sum_{\varrho=1}^{k} C_i^\varrho \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^\varrho \bar{\gamma}_\nu \Big|_{\nu\,=\,n\,-\,\varrho} + \sum_{\nu=0}^{n-k-1} C_\nu^k \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^k \bar{\gamma}_\nu = \mathrm{I} + \mathrm{II} .$$

Nach Lemma 15 ist (G) eine notwendige Bedingung, da die genaue Größenordnung des Diagonalglieds von $C^\varkappa$ gleich $|\Delta\lambda_n|^\varkappa$ ist (vgl. Beweis zu Satz 7). Aus (G) folgt aber

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^\varrho \bar{\gamma}_\nu = O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right)|\Delta\lambda_\nu|^{\varkappa-\varrho} \quad \text{bzw.} \quad = o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right)|\Delta\lambda_\nu|^{\varkappa-\varrho} \quad \text{für} \quad \varrho = 1, \ldots, k .$$

Andererseits ist nach Satz 7

$$C_\nu^\varrho = o(\eta_\nu)\,|\Delta\lambda_\nu|^{\varrho-\varkappa} \quad \text{bzw.} \quad = O(\eta_\nu)\,|\Delta\lambda_\nu|^{\varrho-\varkappa} \quad \text{für} \quad \varrho = 1, \ldots, k.$$

Also gilt

$$\mathrm{I} = o(1) \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

d.h. die Konvergenz der linken Seite von 3(9) ist unter der (notwendigen) Voraussetzung (G) gleichbedeutend mit der Konvergenz von

$$\mathrm{II} - \sum_{\nu=0}^{n-k-1} \frac{1}{k+1}\,\frac{\lambda_{\nu+k+1}-\lambda_\nu}{\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu}\,C_\nu^k \cdot |\Delta\lambda_\nu|\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^{k+1}\bar{\gamma}_\nu = \sum_\nu t_\nu\,\varepsilon_\nu.$$

In dieser Summe durchläuft t_ν wegen 1(13) alle Folgen mit

$$C^\delta[t_\nu] = o(\eta_n) \quad \text{bzw.} \quad = O(\eta_n),$$

wenn s_ν alle Folgen mit

$$C^\varkappa[s_\nu] = o(\eta_n) \quad \text{bzw.} \quad = O(\eta_n)$$

durchläuft. Daher bedeutet die Konvergenz von II, daß die ε_ν o- bzw. O-Konvergenzfaktoren für $C^\delta = R_\lambda^\delta$ (zur Größenordnung η_n) sind. Also sind (F) und (G) notwendig und hinreichend für die Konvergenz von 3(9), d.h. für die Konvergenzfaktoren für $C^\varkappa$.

Aus Satz 11 können wir durch partielle Summation

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\bar{\gamma}_\nu = s_n\bar{\gamma}_n + \sum_{\nu=0}^{n-1} s_\nu\,\Delta\bar{\gamma}_\nu$$

sehr leicht den entsprechenden Satz für die RF-Form der allgemeinen Cesàro-schen Mittel ableiten. [Die Notwendigkeit von $(\overline{\mathrm{G}})$ folgt aus Lemma 16.]

Satz 12. *Es sei (wie bei Satz 7)*

$$\Delta\lambda_{n-1} = O(\Delta\lambda_n), \qquad 0 < \eta_n \nearrow +\infty, \qquad \frac{\eta_n}{|\Delta\lambda_n|^\varkappa} \nearrow.$$

Dann wird die Gesamtheit der o- und O-Konvergenzfaktoren für die allgemeinen Cesàroschen Mittel in der RF-Form (d.h. für $C^\varkappa S$) durch die Bedingungen $(\overline{\mathrm{F}})$ und $(\overline{\mathrm{G}})$ gegeben:

$(\overline{\mathrm{F}})$ *Es gilt die Darstellung*

$$|\Delta\lambda_\nu|\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^{k+1}\bar{\gamma}_\nu = \varepsilon_\nu,$$

wobei die ε_ν o- bzw. O-Konvergenzfaktoren für $C^\delta = R_\lambda^\delta$ (zur Größenordnung η_n) sind;

$(\overline{\mathrm{G}})$ $$\bar{\gamma}_\nu = O\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right)|\Delta\lambda_\nu|^\varkappa \quad \text{bzw.} \quad \bar{\gamma}_\nu = o\left(\frac{1}{\eta_\nu}\right)|\Delta\lambda_\nu|^\varkappa.$$

Zusatz. Nach Lemma 18 können wir die Bedingung $(\overline{\mathrm{F}})$ ersetzen durch

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^{k+1}\bar{\gamma}_\nu = \sum_{n=\nu}^{\infty}\alpha_n\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu(\lambda_{n+1}-\lambda_\nu)^\delta \quad \text{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_n\eta_n| < \infty.$$

Ist $\varkappa$ ganzzahlig, also $\delta = 1$, so können wir die aufgelösten Bedingungen für ε_ν benutzen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n \left| \Delta \left(\frac{\Delta}{\Delta \lambda} \right)_n^{\varkappa} \bar{\gamma}_n \right| < \infty .$$

Jede dieser Bedingungen ist zusammen mit $(\overline{G})$ wieder notwendig und hinreichend.

4. Vergleichssätze für Matrixtransformationen.

Wir hatten in § 2 die Frage untersucht, wann aus einer Größenordnung der A-Transformation eine gewisse Größenordnung der B-Transformation folgt. Wir denken uns jetzt die Matrizen A und B festgehalten und werden nun die umgekehrte Fragestellung untersuchen:

Es sei $0 < \eta_n \nearrow$. Wenn aus

4(1) $$\tau_n = \sum_{\nu=0}^{n} b_{n\nu} s_\nu = o(\eta_n)$$

bei fester Zahlenfolge η_n stets

4(2) $$\sigma_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu = o(\eta_n)$$

folgt, so schreiben wir kurz

4(3) $$o(B) \subseteqq o(A)\ [\eta_n].$$

Folgt aus 4(1) stets 4(2) und auch umgekehrt, so schreiben wir

4(4) $$o(B) = o(A)\ [\eta_n];$$

gilt die Umkehrung nicht, so schreiben wir

4(5) $$o(B) \subset o(A)\ [\eta_n].$$

Die Relationen

$$O(B) \subseteqq O(A)\ [\eta_n], \qquad O(B) = O(A)\ [\eta_n], \qquad O(B) \subset O(A)\ [\eta_n]$$

werden durch Vertauschung von o mit O in 4(1) und 4(2) erklärt.

Es wird sich zeigen, daß die in § 2 untersuchten Matrizen A und B im wesentlichen in der Relation 4(3) zueinander stehen. Dies kommt in den entsprechenden Monotonievoraussetzungen zum Ausdruck. Andererseits ist durch die „Vergleichssätze" die Frage nach den relativen Größenbeschränkungen verallgemeinert. Diese lassen sich jetzt als Vergleichssätze spezieller Art formulieren:

$$o(A) \subseteqq o(B^*)\ [\eta_n] \quad \text{bzw.} \quad O(A) \subseteqq O(B^*)\ [\eta_n] \quad \text{mit} \quad B^* = \begin{pmatrix} a_{n\nu} \\ b_{n\nu} \end{pmatrix}.$$

(So ist z. B. Satz 4 im wesentlichen in Lemma 19 enthalten. Dieser Zusammenhang legt einige einfache Verallgemeinerungen und Ergänzungen zu den Sätzen des § 2 nahe, die aber keine große Bedeutung haben.)

Auch zwischen den Vergleichs- und den Konvergenzfaktorensätzen besteht ein gewisser Zusammenhang, der besonders bei nicht zeilenfiniten Matrizen von Bedeutung ist[16]): die einzelnen Zeilen der Matrix A müssen Konvergenzfaktoren für B sein. Diese „Anwendbarkeitsbedingung" hat insbesondere die Darstellung $A = CB$ zur Folge, wobei die einzelnen Zeilen von C sich aus den Darstellungen der einzelnen Zeilen von A als Konvergenzfaktoren ergeben. Aus dem Toeplitzschen Satz erhält man dann weitere Bedingungen, die zusammen mit den Konvergenzfaktorenbedingungen notwendig und hinreichend für den Stärkevergleich

$$O(B) \leqq O(A)\,[\eta_n] \quad \text{bzw.} \quad o(B) \leqq o(A)\,[\eta_n]$$

sind.

4.1. Matrizen mit Mittelwertsatz. Auch bei den Vergleichssätzen spielen wieder die Matrizen mit Mittelwertsatz eine besonders wichtige Rolle. Wir stellen im folgenden zuerst die für unseren Zweck wichtigen Eigenschaften dieser Matrizen zusammen und werden dann zu Verallgemeinerungen übergehen.

Lemma 19. *Es gelte* $\mathfrak{M}(B)$ *und* $b_{n\nu} \neq 0$ *für* $\nu \leqq n$. *Dann folgt aus*

$$4(6) \quad \sum_{\nu=0}^{n} \Delta_\nu \left(\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}}\right) = O(1) \quad \text{für} \quad n \to \infty \qquad \left(\Delta_\nu \frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} = \frac{a_{nn}}{b_{nn}} \quad \text{für} \quad \nu = n\right)$$

die Beziehung

$$O(B) \leqq O(A)\,[\eta_n].$$

Gilt überdies noch $Sp_0(A)$ *und* $Sp_0(B)$, *so ist auch*

$$o(B) \leqq o(A)\,[\eta_n].$$

(Jurkat-Peyerimhoff [*12*], Satz 5.)

Zusatz. Werden nur Größenordnungen $0 < \eta_n \nearrow +\infty$ in Betracht gezogen, so können die Voraussetzungen $Sp_0(A)$, $Sp_0(B)$ weggelassen werden.

Aus 4(6) folgt $\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} = O(1)$. Um uns von dieser Einschränkung zu befreien, wird ein weiterer Mittelwertsatz $\mathfrak{M}^*$ eingeführt. Wir sagen: „Eine normale Matrix A hat die Eigenschaft $\mathfrak{M}^*$" oder „es gilt $\mathfrak{M}^*(A)$", wenn für jede Folge $\{s_\nu\}$ und alle $n \leqq m$ die Ungleichung

$$\mathfrak{M}^*: \qquad \left|\sum_{\nu=0}^{n} a_{m\nu} s_\nu\right| \leq K^* \sum_{\nu=0}^{n} |a_{m\nu}| \frac{\left|\sum_{\nu=0}^{n'} a_{n'\nu} s_\nu\right|}{\sum_{\nu=0}^{n'} |a_{n'\nu}|} \qquad (0 \leq n' \leq n)$$

mit geeignetem n' gilt.

[16]) Vgl. Lorentz [*15*], Peyerimhoff [*17*], Zeller [*23*].

Lemma 20. *Hinreichend für* $\mathfrak{M}^*$ *(mit* $K^* = 1$*) sind die folgenden Bedingungen*

(M_1) $$a_{n\nu} \neq 0, \qquad 0 \leq \frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} \leq K \quad (0 \leq \nu \leq n \leq m);$$

(M_2) $$\frac{a_{m\nu}}{a_{n\nu}} \searrow \quad \text{für} \quad \nu \nearrow \quad (0 \leq \nu \leq n \leq m).$$

(JURKAT-PEYERIMHOFF [*12*], Satz 1.)

Es sind also die gleichen Bedingungen wie bei Lemma 8, und die dort genannten Beispiele für $\mathfrak{M}$ sind zugleich Beispiele für $\mathfrak{M}^*$.

Lemma 21. *Es gelte* $\mathfrak{M}^*(B)$ *und* $b_{n\nu} \neq 0$ *für* $\nu \leq n$. *Ferner sei*

$$\sum_{\nu=0}^{m} |b_{m\nu}| = O(1) \sum_{\nu=0}^{n} |b_{n\nu}| \quad (0 \leq n \leq m)$$

und

$$\sum_{\nu=0}^{n} |a_{n\nu}| = O(1) \sum_{\nu=0}^{n} |b_{n\nu}|.$$

Dann folgt aus

4(7) $$\sum_{\nu=\mu}^{n} \left| \Delta_\nu \left(\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}} \right) \right| = O\left(\frac{a_{n\mu}}{b_{n\mu}} \right) + O(1) \quad (0 \leq \mu \leq n)$$

die Beziehung

$$O(B) \subseteq O(A) \; [\eta_n].$$

Gilt überdies noch $Sp_0(A)$ *und* $Sp_0(B)$, *so ist auch*

$$o(B) \subseteq o(A) \; [\eta_n].$$

(JURKAT-PEYERIMHOFF [*12*], Satz 6.)

Zusatz. Werden nur Größenordnungen $0 < \eta_n \nearrow + \infty$ in Betracht gezogen, so können die Voraussetzungen $Sp_0(A)$, $Sp_0(B)$ weggelassen werden.

Die Bedingungen 4(6) und 4(7) sind unter einfachen Monotonievoraussetzungen erfüllt.

In gewissen Fällen können die Vergleichssätze verschärft werden:

Lemma 22. *Ist A normal, so folgt aus*

4(8) $$o(B) \subseteq o(A) \; [\eta_n]$$

und

$$b_{n\,n} \neq O(a_{n\,n}) \quad (n \to \infty)$$

die Beziehung

4(9) $$o(B) \subset o(A) \; [\eta_n].$$

In 4(8) *und* 4(9) *darf o durch O ersetzt werden.*
(JURKAT-PEYERIMHOFF [*12*], Lemma 7.)

4.2. Einige Verallgemeinerungen. Bei den bisherigen Vergleichssätzen wurde immer vorausgesetzt, daß für die „schwächere" Matrix B einer

der Mittelwertsätze $\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{M}^*$ gelten soll. Bei Anwendungen ist aber diese Bedingung nicht immer erfüllt. Man wird sich daher von dieser Einschränkung nach Möglichkeit befreien wollen. Die Situation ist ähnlich wie in § 2.2 bei den Sätzen über relative Größenbeschränkungen, und wir helfen uns wieder durch die gleiche Überlegung:

Lemma 23. *Ist C normal, so sind die Aussagen*

$$o(B) \leqq o(A)\ [\eta_n]$$

und

$$o(BC) \leqq o(AC)\ [\eta_n]$$

völlig gleichbedeutend. Dies bleibt richtig, wenn überall o durch O ersetzt wird.

Nach dieser selbstverständlichen Bemerkung kommt es bei den Vergleichssätzen nur auf den Quotienten AB^{-1} an; ein normaler Faktor C auf beiden Seiten kann weggelassen werden. Ist z.B. $B = B_1 B_2$, wobei B_2 normal ist und B_1 einen Mittelwertsatz erfüllt, so läßt sich

$$o(B) \leqq o(A)\ [\eta_n] \quad \text{auf} \quad o(B_1) \leqq o(A B_2^{-1})\ [\eta_n]$$

zurückführen, und wir können jetzt die Ergebnisse von § 4.1 anwenden. Durch diese Überlegung ist allerdings nur dann etwas gewonnen, wenn die Vergleichsbedingungen nach der Umformung nicht zu kompliziert ausfallen, d.h. wenn sich die Elemente der Matrix AB_2^{-1} in einfacher Weise angeben lassen.

Eine erste Anwendung ist

Satz 13. *Es gilt*

$$o(B) \leqq o(A)\ [\eta_n] \quad \textit{und} \quad O(B) \leqq O(A)\ [\eta_n],$$

wenn eine der beiden folgenden Gruppen von Voraussetzungen erfüllt ist:

1°. *Es gelte* $\quad \mathfrak{M}(\Delta^r B), \qquad \Delta_\nu^r b_{n\nu} \neq 0 \quad$ *für* $\quad \nu \leqq n;$

weiter sei $\quad 0 \leqq \dfrac{\Delta_\nu^r a_{n\nu}}{\Delta_\nu^r b_{n\nu}} \leqq K, \qquad \dfrac{\Delta_\nu^r a_{n\nu}}{\Delta_\nu^r b_{n\nu}}$ *monoton in* $\nu;$

schließlich gelte $Sp_0(\Delta^r A)$ und $Sp_0(\Delta^r B)$, wenn η_n beschränkt ist;
oder

2°. *Es gelte* $\quad \mathfrak{M}^*(\Delta^r B), \qquad \Delta_\nu^r b_{n\nu} \neq 0 \quad$ *für* $\quad \nu \leqq n;$

weiter sei $\quad 0 \leqq \dfrac{\Delta_\nu^r a_{n\nu}}{\Delta_\nu^r b_{n\nu}} \searrow \quad$ *für* $\quad \nu \nearrow \quad (0 \leqq \nu \leqq n);$

schließlich sei $\Delta^r B$ permanent[17]) *und $\Delta^r A$ nulltreu.*

Beweis. Wir brauchen nach Lemma 23 nur die Matrizen $\Delta^r B = B S^{-r}$ und $\Delta^r A = A S^{-r}$ zu vergleichen. Die Bedingungen 1° und 2° entsprechen der Anwendung von Lemma 19 bzw. 21.

[17]) Die Permanenzbedingung kann ersetzt werden durch Sp_0 und die Forderung, daß die Zeilennormen die genaue Größenordnung 1 haben sollen.

Zusatz. Die Monotonievoraussetzungen können natürlich leicht durch allgemeinere Voraussetzungen ersetzt werden. Eine Verschärfung von Satz 13 erhält man durch Anwendung von Lemma 22. Schließlich erhält man durch Vertauschung von A mit B und nochmalige Anwendung von Satz 13 gewisse Äquivalenzsätze. (Vgl. JURKAT-PEYERIMHOFF [12], § 4.)

Eine wichtige Anwendung von Satz 13 bezieht sich auf den Fall der gewöhnlichen CESÀROschen Mittel $B = S^\varkappa$:

Ist $\varkappa$ ganzzahlig, so erhalten wir als Vergleichsbedingung bei unbeschränktem η_n

$$\sum_{\nu=0}^{n} |\Delta_\nu^\varkappa a_{n\nu}| = O(1) \qquad (\varkappa = k+1,\ r = k).$$

Wir haben hier die allgemeineren Bedingungen von Lemma 19 an Stelle von 1° benutzt. Wir bemerken, daß die notwendige und hinreichende Vergleichsbedingung nur wenig anders lautet:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \eta_n |\Delta_\nu^\varkappa a_{n\nu}| = O(\eta_n) \quad \text{und} \quad \Delta_\nu^\varkappa a_{n\nu} = o(\eta_n)\ ^{18}).$$

Einfache hinreichende Vergleichsbedingungen bei beliebigem $\varkappa$ sind

1°. Wenn η_n unbeschränkt ist:

$$0 \leq \frac{\Delta_\nu^k a_{n\nu}}{\binom{n-\nu+\delta-1}{n-\nu}} \leq K, \qquad \frac{\Delta_\nu^k a_{n\nu}}{\binom{n-\nu+\delta-1}{n-\nu}} \text{ monoton in } \nu;$$

oder

2°. Wenn $A^* = \left(\frac{1}{n^\delta}\Delta_\nu^k a_{n\nu}\right)$ nulltreu ist und $0 < \frac{\eta_n}{n^\delta} \nearrow$:

$$0 \leq \frac{\Delta_\nu^k a_{n\nu}}{\binom{n-\nu+\delta-1}{n-\nu}} \searrow \quad \text{für} \quad \nu \nearrow \quad (0 \leq \nu \leq n).$$

Aus Satz 13 ergeben sich für die *Äquivalenz*

$$o(S^\varkappa) = o(A)\ [\eta_n] \quad \text{bzw.} \quad O(S^\varkappa) = O(A)\ [\eta_n]$$

drei Gruppen von Bedingungen, von denen wir nur die folgende anführen:

Es gelte $\mathfrak{M}^*(\Delta^k A), \quad \Delta_\nu^k a_{n\nu} \neq 0 \quad$ für $\quad \nu \leq n;$

weiter sei $a_{nn} = O(1), \quad 0 \leq \frac{\Delta_\nu^k a_{n\nu}}{\binom{n-\nu+\delta-1}{n-\nu}} \nearrow \quad$ für $\quad \nu \nearrow;$

schließlich sei $A^* = \left(\frac{1}{n^\delta}\Delta_\nu^k a_{n\nu}\right)$ permanent[17]), $0 < \frac{\eta_n}{n^\delta} \nearrow$.

[18]) Vgl. Satz 15. Man kann übrigens die Bedingungen 4(6) und 4(7) von Lemma 19 und 21 entsprechend verallgemeinern:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu \left|\Delta_\nu \left(\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}}\right)\right| = O(\eta_n) \quad \text{bzw.} \quad \sum_{\nu=\mu}^{n} \eta_\nu \left|\Delta_\nu \left(\frac{a_{n\nu}}{b_{n\nu}}\right)\right| = O(\eta_n)\,\frac{a_{n\mu}}{b_{n\mu}} + O(\eta_n) \quad (0 \leq \mu \leq n).$$

Hierzu braucht man nur in den früheren Beweisen bei der Abschätzung durch den Mittelwertsatz etwas genauer zu verfahren.

Bei Satz 13 haben wir die gewöhnlichen Differenzen benutzt, aber auch hier erhalten wir analoge Ergebnisse bei Verwendung der allgemeinen Differenzen $\Delta/\Delta\lambda$: Nach Lemma 3 gilt für Dreiecksmatrizen A

4(10) $$\sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \bar{a}_{n\nu} = \sum_{\nu=0}^{n} C_\nu^r \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{a}_{n\nu},$$

oder in anderer Form

$$A = \Delta \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)^r \bar{A} \cdot C^r,$$

wobei wir

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)^r \bar{A} = \left(\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{a}_{n\nu}\right)$$

gesetzt haben. Statt die Matrizen A und B zu vergleichen, können wir daher nach Lemma 23 auch $\Delta(\Delta\Delta\lambda)^r \bar{A}$ und $\Delta(\Delta\Delta\lambda)^r \bar{B}$ vergleichen. So gelangen wir in gleicher Weise wie bei Satz 13 zu folgendem allgemeineren Ergebnis.

Satz 14. *Es gilt*

$$o(B) \subseteq o(A)\,[\eta_n] \quad \textit{und} \quad O(B) \subseteq O(A)\,[\eta_n],$$

wenn eine der beiden folgenden Gruppen von Voraussetzungen erfüllt ist:

1°. *Es gelte* $\mathfrak{M}\left(\Delta\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)^r \bar{B}\right)$, $\Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{b}_{n\nu} \neq 0$ *für* $\nu \leq n$;

weiter sei

$$0 \leq \frac{\Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{a}_{n\nu}}{\Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{b}_{n\nu}} \leq K, \qquad \frac{\Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{a}_{n\nu}}{\Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{b}_{n\nu}} \quad \textit{monoton in } \nu;$$

schließlich gelte

$$Sp_0\left(\Delta\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)^r \bar{B}\right) \quad \textit{und} \quad Sp_0\left(\Delta\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)^r \bar{A}\right), \quad \textit{wenn } \eta_n \textit{ beschränkt ist;}$$

oder

2°. *Es gelte* $\mathfrak{M}^*\left(\Delta\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)^r \bar{B}\right)$, $\Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{b}_{n\nu} \neq 0$ *für* $\nu \leq n$;

weiter sei

$$0 \leq \frac{\Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{a}_{n\nu}}{\Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)_\nu^r \bar{b}_{n\nu}} \searrow \quad \textit{für} \quad \nu \nearrow \quad (0 \leq \nu \leq n);$$

schließlich sei

$$\Delta\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)^r \bar{B} \quad \textit{permanent}^{17}) \textit{ und} \quad \Delta\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda}\right)^r \bar{A} \textit{ nulltreu.}$$

Zusatz. Die Monotonievoraussetzungen können natürlich leicht durch allgemeinere Voraussetzungen ersetzt werden. Eine Verschärfung von Satz 14

erhält man durch Anwendung von Lemma 22. Schließlich erhält man durch Vertauschung von A mit B und nochmalige Anwendung von Satz 14 gewisse Äquivalenzsätze.

4.3. Matrixtransformationen, die nicht schwächer als RIESZsche Mittel sind. Wenn man Matrixtransformationen mit den RIESZschen Mitteln vergleichen will, so treten ganz ähnliche Schwierigkeiten wie bei der Bestimmung der Konvergenzfaktoren auf, die wieder zu einem Teil an dem stetigen Parameter der RIESZschen Mittel liegen. Und auch hier ziehen wir zur Lösung des Problems unseren Äquivalenzsatz heran, der unter gewissen Voraussetzungen den Vergleich mit den RIESZschen Mitteln auf einen Vergleich mit den allgemeinen CESÀROschen Mitteln zurückführt.

Wir beginnen mit dem Vergleich bei ganzzahliger Ordnung:

Satz 15. *Notwendig und hinreichend für*

$$O(C^r) \subseteqq O(A)\ [\eta_n]$$

ist die Bedingung

$$4(11) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu \left| \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda} \right)_\nu^r \bar{a}_{n\nu} \right| = O(\eta_n) \quad (n \to \infty);$$

notwendig und hinreichend für

$$o(C^r) \subseteqq o(A)\ [\eta_n]$$

sind die Bedingungen 4(11) *und*

$$4(12) \qquad \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda} \right)_\nu^r \bar{a}_{n\nu} = o(\eta_n) \quad (\nu \text{ fest}, \ n \to \infty).$$

Der *Beweis* folgt aus der Beziehung

$$4(10) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} C_\nu^r \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda} \right)_\nu^r \bar{a}_{n\nu}$$

mit Hilfe des TOEPLITZschen Satzes.

Hinreichende[19]) Bedingungen für

$$O(C^\varkappa) \subseteqq O(A)\ [\eta_n] \quad \text{und} \quad o(C^\varkappa) \subseteqq o(A)\ [\eta_n]$$

bei beliebigem $\varkappa$ erhalten wir aus Satz 14. Wegen der Produktdarstellung

$$C^\varkappa [s_\nu] = C^\delta \left| \frac{1}{k+1} \frac{\lambda_{\nu+k+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu} C_\nu^k \right|, \quad \text{d.h.} \quad C^\varkappa = C^* C^k$$

ist

$$\Delta \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda} \right)^k \overline{C^k} = C^* = \left(\frac{1}{\Gamma(\delta - 1)} \frac{\lambda_{\nu+k+1} - \lambda_\nu}{k-1} \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda} \right)_\nu (\lambda_{\nu-1}^{\cdot} - \lambda_\nu)^\delta \right).$$

[19]) Mit Hilfe des erwähnten Zusammenhanges zwischen Konvergenzfaktoren- und Vergleichssätzen ließen sich auch genaue Bedingungen bei beliebigem $\varkappa$ angeben.

Wir können nun ganz entsprechend wie bei der Anwendung von Satz 13 auf die gewöhnlichen Cesàroschen Mittel vorgehen:

Ist $\varkappa$ ganzzahlig, so erhalten wir als Vergleichsbedingung bei unbeschränktem η_n

$$\sum_{\nu=0}^{n} \left| \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda} \right)_\nu^{\varkappa} \bar{a}_{n\nu} \right| = O(1) \quad (\varkappa = k+1,\ r = k).$$

Wir haben hier die allgemeineren Bedingungen von Lemma 19 an Stelle von 1° benutzt. Die notwendige und hinreichende Bedingung lautet nur wenig anders[18]).

Einfache hinreichende Vergleichsbedingungen bei beliebigem $\varkappa$ sind

1°. Wenn η_m unbeschränkt ist:

$$0 \leq \frac{\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda} \right)_\nu^{k+1} \bar{a}_{n\nu}}{\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda} \right)_\nu (\lambda_{n+1} - \lambda_\nu)^\delta} \leq K, \qquad \frac{\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda} \right)_\nu^{k+1} \bar{a}_{n\nu}}{\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda} \right)_\nu (\lambda_{n+1} - \lambda_\nu)^\delta} \quad \text{monoton in } \nu;$$

oder

2°. Wenn $A^* = \left(\frac{1}{\lambda_{n+1}^\delta} \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda} \right)_\nu^{k} \bar{a}_{n\nu} \right)$ nulltreu ist und wenn $\Delta\lambda_{n+1} = O(\Delta\lambda_n)$, $0 < \frac{\eta_n}{\lambda_{n+1}^\delta} \nearrow$:

$$0 \leq \frac{\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda} \right)_\nu^{k+1} \bar{a}_{n\nu}}{\left(\frac{\Delta}{\Delta\lambda} \right)_\nu (\lambda_{n+1} - \lambda_\nu)^\delta} \searrow \quad \text{für} \quad \nu \nearrow \quad (0 \leq \nu \leq n).$$

Die Aufstellung von Äquivalenzbedingungen durch zweimalige Anwendung von Satz 14 überlassen wir dem Leser.

Die bisher entwickelten Vergleichsbedingungen lassen verschiedene Anwendungen zu:

a) Das „first theorem of consistency“[20]). Wir definieren jetzt $R_\lambda^\varkappa$ für alle $\varkappa$ durch die Gleichung $R_\lambda^\varkappa - C^\varkappa$ und bezeichnen weiter mit $\frac{1}{\lambda^\varkappa} R_\lambda^\varkappa$ diejenige Matrix, die aus $R_\lambda^\varkappa$ entsteht, wenn man die n-te Zeile mit $1/\lambda_{n-1}^\varkappa$ multipliziert. Bei dem first theorem of consistency (in allgemeiner Form) handelt es sich um die Aussagen

$$o\left(\frac{1}{\lambda^\varkappa} R_\lambda^\varkappa \right) \leq o\left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa'}} R_\lambda^{\varkappa'} \right) [\eta_n] \quad \text{und} \quad O\left(\frac{1}{\lambda^\varkappa} R_\lambda^\varkappa \right) \leq O\left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa'}} R_\lambda^{\varkappa'} \right) [\eta_n]$$

für $0 \leq \varkappa \leq \varkappa'$. Zunächst ist klar, daß man sich auf den Fall $\varkappa = k + \delta$, $\varkappa' = k + \delta'$ mit $0 \leq \delta < \delta' \leq 1$ beschränken kann, da das Zeichen $\leq$ transitiv ist. Auf Grund der Beziehung

$$C^\varkappa[s_\nu] = C^\delta \left[\frac{1}{k+1} \frac{\lambda_{\nu+k+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu} C_\nu^k \right] \quad (0 < \delta \leq 1)$$

[20]) Vgl. Hardy-Riesz [6], theorem 16.

läßt sich nach Lemma 23 der Vergleich zurückführen auf

$$4(11) \qquad o\left(\frac{1}{\lambda^\varkappa} R_\lambda^\vartheta\right) \leqq o\left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa'}} R_\lambda^{\vartheta'}\right)\ [\eta_n] \quad \text{und} \quad O\left(\frac{1}{\lambda^\varkappa} R_\lambda^\vartheta\right) \leqq O\left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa'}} R_\lambda^{\vartheta'}\right)\ [\eta_n],$$

wobei man allerdings die zusätzliche Voraussetzung $\Delta\lambda_{n+1} = O(\Delta\lambda_n)$ in Kauf nehmen muß. Die Beziehung 4(11) ist aber richtig nach JURKAT-PEYERIMHOFF [12], Satz 9, und zwar gilt sie sogar für alle η_n mit $0 < \lambda_{n+1}^\varkappa \eta_n \nearrow$. Diese Überlegungen entsprechen im wesentlichen der Anwendung von 1°. (Man vergleiche auch den Beweis von Satz 7.)

b) Das „second theorem of consistency“[21]). Während wir die unstetigen RIESZschen Mittel $R_\lambda^\varkappa$ mit den allgemeinen CESÀROschen Mitteln identifiziert haben, wollen wir die stetigen RIESZschen Mittel $R^\varkappa(\lambda)$ durch die Transformation $I^\varkappa[s_\nu]$ definieren, also als Matrix mit stetigem ersten Parameter:

$$R^\varkappa(\lambda) = \left(\frac{1}{\Gamma(\varkappa+1)} \Delta_\nu (\omega - \lambda_\nu)^\varkappa\right);$$

dabei soll wieder $\lambda_n < \omega \leqq \lambda_{n+1}$ sein und $(\omega - \lambda_\nu)^\varkappa$ für $\nu > n$ durch Null ersetzt werden. Neben $R^\varkappa(\lambda)$ wird die analog gebaute Transformation

$$R^\varkappa(\Phi(\lambda)) = \left(\frac{1}{\Gamma(\varkappa+1)} \Delta_\nu (\Phi(\omega) - \Phi(\lambda_\nu))^\varkappa\right)$$

betrachtet, wobei $\Phi(x)$ für $x \geqq 0$ eine stetige Funktion mit den Eigenschaften

$$0 \leqq \Phi(x) \to \infty \quad (x \to \infty), \qquad \Phi(x) \nearrow \quad \text{(im engeren Sinne)}$$

sein soll. Bei dem second theorem of consistency (in allgemeiner Form) handelt es sich um die Aussagen

$$4(12) \qquad O\left(\frac{1}{\lambda^\varkappa} R_\lambda^\varkappa\right) \leqq O\left(\frac{1}{\Phi^\varkappa(\lambda)} R^\varkappa(\Phi(\lambda))\right) \quad [\eta_n]$$

und

$$4(13) \qquad o\left(\frac{1}{\lambda^\varkappa} R_\lambda^\varkappa\right) \leqq o\left(\frac{1}{\Phi^\varkappa(\lambda)} R^\varkappa(\Phi(\lambda))\right) \quad [\eta_n].$$

Dabei soll z.B. 4(12) bedeuten, daß aus

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}^\varkappa} C_n^\varkappa = O(\eta_n) \quad (n \to \infty)$$

stets

$$4(14) \qquad \frac{1}{\Phi^\varkappa(\omega)} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\Gamma(\varkappa+1)} \Delta_\nu (\Phi(\omega) - \Phi(\lambda_\nu))^\varkappa s_\nu = O(\eta_n) \quad (\omega \to \infty)$$

folgt. Entsprechendes gilt bei 4(13). Die Bedingung 4(14) ist genau dann erfüllt, wenn sie für jede Folge ω_n mit $\lambda_n < \omega_n \leqq \lambda_{n+1}$ gilt. Für jede feste Folge ω_n ist aber die linke Seite von 4(14) eine gewöhnliche Matrixtransformation, und wir können unsere Vergleichsbedingungen anwenden.

[21]) Vgl. HARDY-RIESZ [6], theorem 17 und 19; HARDY [3]; HIRST [7]; KUTTNER [14]; JURKAT-PEYERIMHOFF [12], § 5.2.

Ist $\varkappa$ ganzzahlig, so erhalten wir nach Satz 15 als notwendige und hinreichende Bedingung für 4(12)

$$4(15)\qquad \sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu \lambda_{\nu+1}^{\varkappa} \left| \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta \lambda} \right)_\nu^{\varkappa} (\Phi(\omega) - \Phi(\lambda_\nu))^{\varkappa} \right| = O(\eta_n) \Phi^{\varkappa}(\omega) \quad (\omega \to \infty),$$

wobei für η_n alle Zahlenfolgen mit $0 < \eta_n \lambda_{n+1}^{\varkappa} \nearrow$ zugelassen sind. Als notwendige und hinreichende Bedingungen für 4(13) ergeben sich 4(15) zusammen mit

$$4(16)\qquad \Delta_\nu \left(\frac{\Delta}{\Delta \lambda} \right)_\nu^{\varkappa} (\Phi(\omega) - \Phi(\lambda_\nu))^{\varkappa} = o(\eta_n) \Phi^{\varkappa}(\omega) \quad (\omega \to \infty).$$

Diese Bedingungen kann man als Weiterbildung der Bedingungen von Hirst [7] ansehen, die hinreichend, aber nur in einem schwächeren Sinne notwendig sind (vgl. Kuttner [14]).

Hinreichende Bedingungen bei beliebigem $\varkappa$ erhalten wir aus 1° und 2°, wenn wir dort η_n durch $\eta_n \lambda_{n+1}^{\varkappa}$ und $\bar{a}_{n\nu}$ durch $\frac{\lambda_{n+1}^{\varkappa}}{\Phi^{\varkappa}(\omega)} (\Phi(\omega) - \Phi(\lambda_\nu))^{\varkappa}$ ersetzen. Man kann versuchen festzustellen, für welche Funktionen $\Phi(x)$ diese Bedingungen erfüllt sind; aber wir wollen hierauf nicht weiter eingehen (vgl. Jurkat-Peyerimhoff [12], § 5.2).

c) Iteration bewichteter arithmetischer Mittel. Man wird fragen, warum wir die allgemeinen Cesàroschen Mittel nicht als gewöhnliche Iteration der bewichteten arithmetischen Mittel eingeführt haben, sondern die kompliziertere Definition

$$C^k[s_\nu] = \frac{1}{k} C^1\left[\frac{\lambda_{\nu+k} - \lambda_\nu}{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu} C_\nu^{k-1} \right]$$

der Definition

$$M^k = (C^1)^k$$

vorgezogen haben[22]). Uns lag daran, für die Rieszschen Mittel eine für manche Zwecke brauchbarere Form zu finden, und wir können daher auch so fragen: Sind die Rieszschen Mittel (d.h. C^k) mit M^k äquivalent? Die Hilfsmittel für einen Vergleich dieser Verfahren in der einen Richtung stehen in Satz 15 bereit. Man kann ebenso leicht nach der gleichen Methode ein zu Satz 15 analoges Ergebnis für die Matrix M^k beweisen, wodurch der Vergleich auch in der anderen Richtung möglich wird. Die Bedingungen für λ_ν, die man auf diese Weise erhält, sind für größere Werte von k nicht sehr übersichtlich und nur erfüllt für gewisse regelmäßig wachsende Folgen λ_ν.

Um den einfachsten Fall zu betrachten, setzen wir $k = 2$: Bei unbeschränktem η_n ist nach Satz 15 für den Vergleich

$$O(C^2) \leqq O(M^2)\ [\eta_n] \quad \text{und} \quad o(C^2) \leqq o(M^2)\ [\eta_n]$$

notwendig und hinreichend

$$4(17)\qquad \sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu \left| \Delta_\nu \left(\frac{\lambda_{\nu+1} - \lambda_\nu}{\lambda_{\nu+2} - \lambda_\nu} \right) \right| = O(\eta_n).$$

[22]) Die Iteration M^k der arithmetischen Mittel wurde schon von K. Knopp [13] in anderem Zusammenhang untersucht.

Die Bedingung 4(17) ist nicht für alle zulässigen Folgen λ_n erfüllt, aber z.B. wenn $\frac{\Delta\lambda_{\nu+1}}{\Delta\lambda_\nu}$ monoton ist.

Auf eine Untersuchung des allgemeinen Falles, wo in die Bedingungen natürlich die Differenzen höherer Ordnung eingehen, wollen wir verzichten. Wir erkennen aber, daß sich die RIESZschen Mittel nicht in der von uns gewünschten Allgemeinheit durch die gewöhnliche Iteration der bewichteten arithmetischen Mittel ersetzen lassen.

Literatur.

[1] GERGEN, J. J.: Summability of double Fourier series. Duke Math. J. **3**, 133—148 (1937). — [2] GERGEN, J. J., and S. B. LITTAUER: Continuity and summability for double Fourier series. Trans. Amer. Math. Soc. **38**, 401—435 (1935). — [3] HARDY, G. H.: The second theorem of consistency of summable series. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **15**, 72—88 (1916). — [4] HARDY, G. H.: Orders of infinity, 2. Aufl. Cambridge 1924. — [5] HARDY, G. H.: Divergent series. Oxford 1949. — [6] HARDY, G. H., and M. RIESZ: The general theory of Dirichlet's series. Cambridge 1915. — [7] HIRST, K.: On the second theorem of consistency in the theory of summation by typical means. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **33**, 353—366 (1932). — [8] HOBSON, E. W.: The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series, 2. Aufl., Bd. II. Cambridge 1926. — [9] JURKAT, W.: Über Konvergenzfaktoren bei RIESZschen Mitteln. Math. Z. **54**, 262—271 (1951). — [10] JURKAT, W.: Über RIESZsche Mittel mit unstetigem Parameter. Math. Z. **55**, 8—12 (1952). — [11] JURKAT, W., u. A. PEYERIMHOFF: Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Z. **55**, 92—108 (1952). — [12] JURKAT, W., u. A. PEYERIMHOFF: Mittelwertsätze und Vergleichssätze für Matrixtransformationen. Math. Z. **56**, 152—178 (1952). — [13] KNOPP, K.: Eine notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung. Palermo Rendiconti **25**, 237—252 (1908). — [14] KUTTNER, B.: Note on the „second theorem of consistency" for RIESZ summability. J. Lond. Math. Soc. **26**, 104—111 (1951). — [15] LORENTZ, G.: Eine Bemerkung über Limitierungsverfahren, die nicht schwächer als ein CESÀRO-Verfahren sind. Math. Z. **51**, 85—91 (1949). — [16] MINAKSHISUNDARAM, S., and C. T. RAJAGOPAL: On a tauberian theorem of *K.* ANANDA RAU. Quart. J. Math. **17**, 153—161 (1946). — [17] PEYERIMHOFF, A.: Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Diss. Tübingen 1951. — [18] PEYERIMHOFF, A.: Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z. **55**, 23—54 (1952). — [19] RIESZ, M.: Une méthode de sommation équivalente à la méthode des moyennes arithmétiques. C. R. Acad. Sci. Paris **152**, 1651—1654 (1911). — [20] RIESZ, M.: Sur un théorème de la moyenne et ses applications. Acta Litt. ac. Sci. Univ. Szeged **1**, 114—126 (1923). — [21] RIESZ, M.: Sur l'équivalence de certaines méthodes de sommation. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **22**, 412—419 (1923). — [22] VERBLUNSKY, S.: On the limit of a function an a point. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **32**, 163—199 (1931). — [23] ZELLER, K.: Abschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Z. **55**, 55—70 (1952).

Tübingen, Amselweg 18.

(Eingegangen am 9. Juni 1952.)

Ergebnisse der angewandten Mathematik

Unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik" herausgegeben von Professor Dr. **F. Lösch**, Stuttgart.

Soeben erschien:

Zweites Heft: **Die konfluente hypergeometrische Funktion**

Mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. Von Professor Dr.-Ing. **Herbert Buchholz**, Techn. Hochschule Darmstadt. Mit 9 Textabbildungen. XVI, 234 Seiten. 1953. Steif geheftet DM 36.—

Inhaltsübersicht: **I. Die Differentialgleichung der konfluenten hypergeometrischen Funktion in ihren verschiedenen Formen und die Definitionen der sie lösenden Funktionen:** Die Kummersche Differentialgleichung und ihre Lösungen. Die Whittakersche Differentialgleichung und ihre Lösungen. Verwandte Differentialgleichungen. Die Funktionen des parabolischen Zylinders. Höhere Ableitungen. Die Funktionen des Drehparabols und des parabolischen Zylinders als Partikularintegrale der Wellengleichung in den entsprechenden Koordinaten. — **II. Allgemeine Integraldarstellungen für die parabolischen Funktionen selbst und ihre Produkte:** Integraldarstellungen für die einfachen parabolischen Funktionen. Integraldarstellungen für die Produkte aus zwei parabolischen Funktionen. — **III. Die Asymptotik der parabolischen Funktionen:** Die Asymptotik bei großen Werten von z oder μ oder $\varkappa$. Die Asymptotik bei großen Werten von z und $\varkappa$. — **IV. Unbestimmte und bestimmte Integrale mit parabolischen Funktionen und einige unendliche Reihen:** Unbestimmte Integrale mit parabolischen Funktionen. Die Laplace-Transformierte der parabolischen Funktionen. Verschiedene weitere Integrale mit parabolischen Funktionen und einige unendliche Reihen. — **V. Die den parabolischen Funktionen zugehörenden Polynome und unendliche Reihen mit diesen Polynomen:** Reihen und Integrale mit Laguerre-Polynomen. Reihen und Integrale mit Hermite-Polynomen. Weitere besondere Polynome und Funktionen. — **VI. Die Parameterintegrale in den Beziehungen für die verschiedenen Wellentypen der mathematischen Physik in den parabolischen Koordinaten:** Integrale über den vorderen Parameter von zwei und vier parabolischen Funktionen. Die Integraldarstellungen für die verschiedenen Wellentypen der mathematischen Physik. — **VII. Nullstellen und Eigenwerte:** Die Nullstellen der Funktion $Mx, \mu/2(z)$. Eigenwertprobleme mit parabolischen Funktionen. Anhang. Sachverzeichnis.

Früher erschien:

Erstes Heft:

Die praktische Behandlung von Integral-Gleichungen

Von Dr. habil. **H. Bückner**, Berlin. Mit 1 Textabbildung. VI, 127 Seiten. 1952. Steif geheftet DM 18.60

Aus den Besprechungen: Die Integralgleichungen haben in allen exakten Wissenschaften eine so große Anwendung gefunden, daß ihre praktische Behandlung eine besondere Aufgabe wurde, zu deren Lösung schon viel beigetragen worden ist. Der Verf. hat sich der Mühe unterzogen, das vorhandene Material zusammenzufassen und zu erweitern, z. B. durch neue Ergebnisse von Wielandt. Leicht war die Aufgabe nicht, es ist viel schöner, eine elegante Theorie aufzubauen, als sich durch das dichte Gestrüpp der verschiedenen Rechenmethoden durchzuarbeiten. Bückner ordnet diese nach drei Gesichtspunkten. Erstens gibt er im zweiten Abschnitt Einschließungssätze, die, wie der Name andeutet, die Eigenwerte in relativ einfache Integrale einschließen; zweitens bespricht er im dritten Abschnitt die Iterationsverfahren, die hier, wie überall in der Praxis, von größter Bedeutung sind, und drittens nähert er die gegebenen Kerne durch leichter zu behandelnde an, wobei auch die Störungstheorie behandelt wird, d. h. die Frage, wie die Eigenwerte durch die Änderung des Kerns beeinflußt werden. Hier ist auch der Platz für Untersuchungen von Erh. Schmidt, von Tricomi und von Rellich. Zum Schluß wird ein Ausblick auf die Möglichkeit maschineller Verfahren gegeben. Der erste Abschnitt gibt eine kurze Einführung in die Fredholmsche Theorie ohne ausführliche Beweise. Fast hundert Nummern umfaßt das Literaturverzeichnis. Im ganzen ein stark konzentriertes Werk für den Fachmann. *Professor Hamel, Berlin, in „Elektrotechnische Zeitschrift"*

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Grundzüge der theoretischen Logik

Von **D. Hilbert** † und Dr. **W. Ackermann**-Lüdenscheid. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band XXVII.) Dritte, verbesserte Auflage. VIII, 155 Seiten. 1949. DM 16.50; Ganzleinen DM 19.80

Aus den Besprechungen: Dieses ursprünglich aus den Ausarbeitungen Hilbertscher Vorlesungen hervorgegangene und von Wilhelm Ackermann zu einem Ganzen abgerundete und inhaltlich bereicherte Lehrbuch hat in seinen beiden ersten Auflagen bei dem an den mathematischen Grundlagenproblemen interessierten Publikum lebhaften Anklang gefunden und sich auch als Leitfaden für Vorlesungen bewährt, so daß das Erscheinen der dritten Auflage lebhaft begrüßt werden wird. Der Charakter des Buches ist zugleich ein wissenschaftlich-expositorischer und ein pädagogischer. Ohne besondere Vorkenntnisse vorauszusetzen, führt es den Leser schnell in die Fragestellungen und Methoden der mathematischen Logik ein. Dabei handelt es sich teils um direkte Entscheidungsverfahren, teils um die Formalisierung des logischen Schließens durch axiomatisch gefaßte Regeln des kalkülmäßigen Operierens. Die Betrachtungen werden allenthalben, ausgehend von der Orientierung am Inhaltlich-Logischen, bis zur theoretischen Systematik geführt. Die Gliederung des Buches in Kapitel erfolgt nach den Gebieten des logischen Kalküls: Aussagenkalkül, Klassenkalkül, engerer Prädikatenkalkül, weiterer Prädikatenkalkül. Durch eine geschickte Form der Darstellung, welche jede Weitschweifigkeit vermeidet, wird die Darbietung eines reichhaltigen Stoffes auf einem verhältnismäßig kleinen Raum und mit einer nur sehr maßvollen Anwendung von Symbolik ermöglicht.
Die neue Auflage bringt gegenüber der vorigen erstens einige Verbesserungen und Ergänzungen im einzelnen und ferner inhaltlich Neues: 1. Die Darlegung eines (bisher wohl nicht bekannten) Entscheidungsverfahrens für den Klassenkalkül, 2. eine genauere Behandlung des Stufenkalküls, 3. eine Schlußbetrachtung über die Möglichkeiten, den Stufenkalkül durch andere Arten der Erweiterung des Prädikatenkalküls zu ersetzen.
„Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik"

Inhaltsverzeichnis: Einleitung. Erstes Kapitel: *Der Aussagenkalkül.* Einführung der logischen Grundverknüpfungen. Äquivalenzen; Entbehrlichkeit von Grundverknüpfungen. Normalform für die logischen Ausdrücke. Charakterisierung der immer richtigen Aussagenverbindungen. Das Prinzip der Dualität. Die disjunktive Normalform für logische Ausdrücke. Mannigfaltigkeit der Aussagenverbindungen, die aus gegebenen Grundaussagen gebildet werden können. Ergänzende Bemerkungen zum Problem der Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit. Systematische Übersicht über alle Folgerungen aus gegebenen Axiomen. Die Axiome des Aussagenkalküls. Beispiele für die Ableitung von Formeln aus den Axiomen. Die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems. Die Unabhängigkeit und Vollständigkeit des Systems. — Zweites Kapitel: *Der Klassenkalkül* (einstellige Prädikatenkalkül). Inhaltliche Umdeutung der Symbolik des Aussagenkalküls. Vereinigung des Klassenkalküls mit dem Aussagenkalkül. Systematische Ableitung der traditionellen Aristotelischen Schlüsse. — Drittes Kapitel: *Der engere Prädikatenkalkül.* Unzulänglichkeit des bisherigen Kalküls. Methodische Grundgedanken des Prädikatenkalküls. Vorläufige Orientierung über den Gebrauch des Prädikatenkalküls. Genaue Festlegung der Bezeichnungen im Prädikatenkalkül. Die Axiome des Prädikatenkalküls. Das System der identischen Formeln. Die Ersetzungsregel; Bildung des Gegenteils einer Formel. Das erweiterte Dualitätsprinzip; Normalformen. Die Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit des Axiomensystems. Die Vollständigkeit des Axiomensystems. Ableitung der Schlußfolgerungen aus gegebenen Voraussetzungen; Zusammenhang mit den identischen Formeln. Das Entscheidungsproblem. — Viertes Kapitel: *Der erweiterte Prädikatenkalkül.* Der Prädikatenkalkül der zweiten Stufe. Einführung von Prädikatenprädikaten; logische Behandlung des Anzahlbegriffs. Darstellung der Grundbegriffe der Mengenlehre im erweiterten Kalkül. Die logischen Paradoxien. Der Stufenkalkül. Anwendungen des Stufenkalküls. Abschließende Bemerkungen zum Stufenkalkül. Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.